DE

ANNULO SATURNI.

DE

ANNULO SATURNI

COMMENTATUS EST

Elto Martini Beima,

MUS. HIST. NAT. PUBL. CONSERVATOR.

LUGDUNI BATAVORUM,

APUD S. ET J. LUCHTMANS,

ACADEMIAE TYPOGRAPHOS,

MDCCCXLII.

22⁵⁰ 10

L. B. S.

Opus qualecunque, quod Tibi jam offero, primitus edere constitueram tanquam Dissertationem, qua Mathematicarum ac Physicarum Disciplinarum Doctoratum consequerer. Variis autem rebus, quas scire nihil refert, nec mutare penes me erat, factum est, ut ultra quinquennium illud propositum distulerim; neque adhuc sperare mihi licet, brevi fore, ut, quod jam pridem voluerim, illud efficiam.

Attamen visum est mihi, ea interea, quae de argumento, astronomiae cultoribus certe non spernendo, investigare conatus sum, benigno Eruditorum judicio submittere.

Mora quidem ista hoc mihi praestitit commodi, ut, quum ea, quae proximis annis de Annulo Saturni *sint observata et memoriae prodita, nunc addere potuerim, haec mea commentatio magis completa atque absoluta in lucem prodeat.*

Postquam consilium cepi, hanc materiam tractandi, hoc inprimis statuebam, ut nodorum annuli Saturni inclinationem locumque quoad eclipticam accuratius determinarem, quam adhuc factum fuerat. Quum vero hac in re

occupatus essem, plurimam eidem operam tribuebant clarissimorum Astronomorum nonnulli, praesertim BESSEL *ac* STRUVE, *quorum studio et doctrina multum me profecisse gratus agnosco. Hanc scilicet partem, quam praecipue tractandam mihi proposueram, diligentius et copiosius elaborare conatus sum.*

Figuram variorum annulorum eorumque motus circum centra gravitatis, eximiam LA PLACII *theoriam secutus, hic quoque fusius ac methodo pure analytica exponere lubens voluissem, postquam jam magnam partem literis mandaveram. Sed illud, ut ea, qua oporteat, perspicuitate ac diligentia faciam, in aliud tempus differendum esse mihi videtur, ne hujus libri molem, jam satis grandem, nimis adaugeam. Lugduni Batavorum d.* XXX *Maji* CIƆ IƆ CCCXLII.



CONSPECTUS.

ERRATA.

Pag.	1.	*lin.*	*antepen.*	*loco*	quae pleramque	*lege*	quam plerumque
»	1.	»	*ult.*	»	adversa oceani ora	»	adversae oceani orae
»	3.	»	5.	»	sua	»	suo
»	5.	»	2.	»	circumdavi	»	circumdari.
»	8.	»	11.	»	annulus	»	annulum
»	244.	»	25.	»	obsurat	»	obscurat
»	248.	»	*ultima*	»	brumales	»	brumale

INTRODUCTIO.

Quot et quam variae sint inventiones saeculi, quod vivimus, decimi noni attamen saeculum decimum septimum, non quidem tam multifariis, at non minus memorabilibus celebratum fuit inventis. Exstant adhuc inconcussa literis consignata monumenta virorum clarissimorum KEPLERI, HUGENII, NEWTONI: atque quando omnes reliquiae monumentaque regum et imperatorum hujus mundi jam dudum in pulverem redacta erunt, eorumque nomina non amplius nuncupabuntur; illorum triumvirorum inventa manebunt eodemque immutabili in coelo fulgebunt splendore.

Cuinam tandem causae illae multiplices inventiones, quae sibi invicem quotidie succedunt, adscribendae sunt? Unice et solum indefatigabili inquisitioni et perscrutationi legum Naturae. Legum illarum ope, quae nihil aliud sunt, nisi certi limites, intra quos magno Universi CREATORI placuit suae ipsius facultatis creandi operationem circumscribere; homini, licet mortali, tam profunde in creata penetrare datum est. Hisce legibus, quae identidem, ut ipse CREATOR, immutabiles sunt, omnes res creatae sunt subjectae.

Nec quis putet, considerationibus investigationibusque nimis longe iri posse, vel illicitum fore, tam profunde in naturae secreta penetrare; nulla habet natura secreta, in suis actionibus illa palam aperteque progreditur: ubicunque adhuc velamine videtur circumvoluta, quod usque in hunc diem frustra conati sunt tollere homines, vel potius, ubi limites sunt, quos transgredi nondum potuerunt, id unice nostri ingenii tenuitati nostrorumque sensuum debilitati adscribendum est, quae pleramque sequitur tardus humanae mentis progressus.

Quum nondum naves erant neque inventa erat pyxis nautica, quaenam tunc causa, quod adversa oceani ora nobis tecta erant? Profecto non in eo quidem quod ad

illas regiones aditus nobis interclusus esset; ab omnibus inde temporibus aditus patuit, at vero adjumentis carebamus, quibus ad illas accederemus.

Per millenos annos corpora viderant homines in terram cadere, nemini vero illud mirum vel singulare videbatur, nemini unquam quaestio oriebatur, quare lapis, quando dimittitur vel non satis sustentatur, cadat? donec illud phaenomenon NEWTONI excitaret sagacitatem, qui non probare illud axioma poterat, *necesse esse ut cadat lapis.*

Attamen multum aberat, ut NEWTONI ingenium tantum esset, ut haec quaestio, simulac ipsi obveniret, esset soluta; minime quidem; sedecim annos cogitando et computando impendere debuit, antequam tandem, die 28 Aprilis anni 1686, praeclarae suae intentionis, quasi infantis jam quatuor annos nati, nuntium, cum Academia Londinensi et anno sequenti publice communicaret, in lucem missis *Philosophiae suae naturalis principiis mathematicis.*

Quam simplex et veritatis plenus hic infans quoque esset, tamen (quod ab antiquissimis inde temporibus humano ingenio proprium esse videtur) cum magnis difficultatibus ipsi luctandum fuit; vulgus, et ipsis quidem doctis viris ducibus, ut abortum considerabant, ut ipsi putabant, mox post nativitatem suffocandum interimendumque; alii rursus, qui illum laeto vultu adspiciebant, ut filium agnoscebant divinae originis; unus adeo, HOOKE scilicet, patrium jus sibi arrogare volebat; nimis autem perspicuum erat, hoc NEWTONO competere, licet vir magnus laudem debitam auctori suo conferret.

Quisnam autem hic valde culpatus atque magnopere laudatus mirabilis erat infans? Quid aliud, nisi simplex quaedam *lex naturae: lex gravitatis*, quae ubique suas exserit actiones, secundum *rationem inversam quadratarum distantiarum* et in *rectam rationem massarum*, in quibus sita est. Revera lex simplex et tamen Universi clavis; simplex quod ad principium, et infinite magna, quod ad effectus. Hac simplici lege tota mechanica coelestis nititur.

Celebratur hoc saeculum multis etiam gravibusque inventionibus, e quibus unam inprimis nominemus, quae illam, quam modo memoravimus, triginta praecesserat annos; *annuli Saturni inventionem*, a nostrate CHRISTIANO HUGENIO detecti, cujus annuli descriptionem dare in sequentibus nobis propositum est.

Hoc aenigmatibus circumvolutum corpus, hucusque in suo genere unicum, astronomorum attentionem in se traxit; omnes fere magni astronomi, quos Europa tribus his ultimis saeculis protulit, dignum putaverunt, ad quod attenderent; multae observationes computationesque ad illud sunt adaptatae, at multum abest, quin disputandi materia jam plane praecisa et consumta sit. Quum meae dissertationis argumentum hunc annulum eligebam, inclinatio situsque nodorum

ejus plani ad illud eclipticae adhuc parum definita erant. Ad illa elementa, quam diligenter fieri posset, computanda, omnes observationes, quarum compos fieri poteram, et quibus quodammodo fidere possumus, in unum collegi, eo consilio, ut ex iis accuratos eventus nanciscerer. Spero fore ut haec successu sua non careant, neque ego supervacaneum laborem suscepisse existimer. Non inutilem autem, ut mihi videtur, astronomicis scientiis laborem aggressus sum; contra, quae in hunc usque diem de illo mirabili coelesti corpore innotuerant, omnia in unum collegi et quae inde certo consequebantur in medium protuli; ita ut haec commentatio ut quam maxime fieri poterat completa annuli Saturni monographia possit considerari.

CAPUT I.

ANNULI DETECTI HISTORIA.

§. 1.

Ab antiquissimis inde temporibus, planetarum plerorumque, ut Saturni, Jovis, Martis, Veneris et Mercurii, nomina tantum mortalibus cognita erant, et per multa secula planetae ipsi eorumque indoles ac natura homines latuere. Sciebant tantum eos ad systema solare pertinere et corpora rotunda esse.

§. 2.

Exeunte demum nostrae aerae seculo decimo sexto, Zacharias Janssenus Medioburgensis, casu tubos opticos invenit; sed frustra. Princeps enim Mauritius hocce instrumentum magna cum utilitate in bello adhiberi posse existimans, ei hujus inventionis patefactionem interdicebat. Invito tamen Mauritio, res per *Europam* omnem divulgabatur; insciis quamvis omnibus, quomodo instrumenta composita essent. Pervenit etiam fama ad Galilaeum Venetum, qui statim ad rem incognitam detegendam omnes intendit vires, felici successu usus; refractionis enim radiorum luminis theoria ductus, compositionem invenit tuborum opticorum, duobus vitris instructorum. Statim fabricatus est talem, quo objecta in diametro triplo majora conspiciebat. Lapsu temporis ars crevit, et non diu post Galilaeus duos alios confecit, quorum altero octies, altero trigesies majora objecta conspicabatur. Ab hoc inde tempore dispulsae sunt ignorantiae tenebrae, coelaque hominum oculis prope perlustranda patuere. Astronomia aliam eamque plane novam formam nacta, campusque immensus hominum indagationi apertus est.

Laus igitur tribuatur viro, qui ingenii acumine artem tam utilem pulchramque eo usque perduxit.

§. 3.

Jamjam Galilaeus telescopium, recentius a se compositum, ad coelum conver-

tit; et anno 1610, nocte diei 7 Januarii, invenit tribus satellitibus Jovem planetam cinctum, ejusdemque mensis die 13 eundem etiam quarto circumdavi vidit.

Sed deinceps referamus et paucis verbis explicemus inventa virorum doctorum, quatenus ad Saturni annulum pertinent. Diximus jam nonnulla de Galilaeo ideoque ad eum redeamus.

Observationes suas persequens, planetae Saturni phaenomenon quoddam detexit, quod eodem anno singulari modo literis mandavit; erat enim iis temporibus inter viros doctos ea consuetudo, ut unusquisque, qui aliquid nondum omnino certum et ulterius deinceps investigandum invenisset, literis transpositis illud indicaret. Hujus consuetudinis origo in humani generis superbia latet, studiumque honoris, quo omnes ducimur, non sinebat, alii inventionis cujusdam honorem tribui; non tamen res detectas pro certis haberi voluerunt, ne, quum humanum ingenium erroribus subjectum sit, inventum saepe nullius momenti aliorum derisioni publice exponeretur. Hanc consuetudinem igitur etiam secutus est Galilaeus, et inventionem suam literis transpositis hoc modo descripsit (1):

s m a i s m r m i l m e p o e t a l e u m i d u n e n u g t t a u i r a s.

§. 4.

Inter eos, qui hunc versum explicare conati fuere, locum occupat celeberrimus Keplerus, qui, ut ejus verbis utar, sequentem versum semibarbarum, ex literis transpositis confecit:

Salve umbistineum geminatum Martia proles.

Sed longissime ab auctoris sententia aberravit, quod patet ex ipsius Galilaei epistola ad Julianum de Medicis, 13 Novembris anno 1610 scripta; dicere enim voluit:

Altissimum planetam tergeminum observavi.

Ejusque sententia huc redit, Saturnum, cognitorum tunc temporis planetarum longissime a sole distantem, sibi apparuisse triformem. Viderat scilicet ad utrumque planetae latus duos globulos, quos satellites esse putabat, cujusmodi quatuor apud Jovem detexerat; hoc tamen discrimine, quod nequaquam ratione habita planetae moverentur, et conjuncti viderentur cum planeta, linea recta quasi invisibili, quae eadem via atque aequator extenderetur; uti patet in *Fig.* 1. Simul indicat, Saturnum, quoties eum contemplaretur per oculare (*oogglas*), quod non plurimam multiplicat, sibi apparuisse forma longiuscula olivae, ut *Fig.* 2, globulos

(1) Vid. Joannis Kepleri, *in Dioptricem Praefatio*, pag. 73.

tamen observari non posse. Putabat porro GALILAEUS, si oculari uteretur, quod plus quam millies superficiem multiplicaret, globos tres visum iri, distincte sese invicem quasi tangentes nec nisi filo tenuissimo et vix conspicuo a se invicem diremtos.

Globulos hos poëtarum more comparat cum servis domesticis, Saturno seni attribui solitis, ut eum aetate labente adjuvarent, et nunquam ab illo discederent.

Ait de GALILAEO HUGENIUS noster (1): » Nam si grandiores tubos atque optimis vitris instructos adhibuisset, haud dubie pro triplici hac globulorum facie eadem sese illis obtulisset quam nobis diximus anno 1655, ac rursus anno insequenti, die 13 Octobris visum. "

Per biennium hocce phaenomenon observaverat GALILAEUS, quum omnino valde miratus est anno 1612, binos extremos globulos evanuisse, et solum medium apparere. Brevi post tamen globuli collaterales iterum apparuerunt, et tum a multis aliis observabantur, certe observari credebantur. Sufficiant haec de GALILAEO ejusque in detegendo Saturni annulo praestita opera; quam enim explicationem hujus phaenomeni dedit, ea parum lucis attulit. Adjiciemus tantum quae de eo refert RICCIOLUS (2):

» Anno 1612 GALILAEUS scribit ad MARCUM VELSERUM, Saturnum circa solstitium aestivum ejusdem anni visum triformem, sed intermissis observationibus, eo quod nihil tale suspicaretur, tandem sub finem Novembris visum solitarium, ac rotundum, et sic perseverasse initio Decembri; unde conjecit, sed cum formidine, fore ut circa solstitium aestivum anni 1613, Saturnus appareret cum comitibus, et post duos menses illi absconderentur usque ad brumam anni 1614, et eum apparituros per aliquot menses; et anno 1615 in solstitio aestivo non totos, sed ex parte apparituros; deinde integros, ac bene magnos per multos annos, absque ulla occultatione apparituros. "

§. 5.

Transeamus igitur ad alium, de quo pauca dicere visum est, nempe SCHEINERUM. Hic quum *Ingolstadii* tubum opticum ad Saturnum verteret, vidit eum diebus 12, 13 et 14 mensis Februarii anno 1614, narrante RICCIOLI (3), eadem forma qua GALILAEUS; observans tamen globulum sinistrum, quia altius colloca-

(1) HUGENII, *Opera Varia*, Vol. I. pag. 556.
(2) RICCIOLI, *Astronomia reformata*, Lib. X. Cap. IX. pag. 361.
(3) *Ibidem*, pag. 364.

tus erat, clarius fulgere et longius a Saturno remotum esse. Differunt tamen de hacce SCHEINERI observatione virorum doctorum sententiae; putat enim HUGENIUS Saturnum a SCHEINERO visum esse sub forma longe alia, nempe tali modo ut collaterales globuli ligamentis latis Saturno essent affixi, quasi hic auribus esset instructus, ut apparet in *Fig.* 3; sed major hac in re fides tribuenda videtur RICCIOLO, ipsius SCHEINERI verba laudanti. Dicit enim ipse SCHEINERUS de Saturno (1): » *Modo unus, modo triceps comparet: alias procerus, alias rotundus.*"

Non alienum visum est de sequentibus deinceps astronomis RICCIOLI ipsius verba hoc loco referre, quos quum ille secundum annorum seriem enumeraverit, nos eundem ordinem sequemur.

Anno 1616 P. JOSEPHUS BLANCANUS sub finem Octobri, ut narrat in *Sphaera* lib. 15. cap. 7, vidit Saturnum oviformem cum duabus maculis fere rotundis versus verticem. Et eodem modo, anni 1619 mense Novembri, sed habebat tubum imperfectum.

Anno 1625, Februarii 17, MARTINUS HORTENSIUS vidit Saturnum cum globulis fere ut GALILAEUS; eratque non longe ab oppositione cum Sole, ut narrat HEVELIUS, in libro *de Saturni nativa facie*, pag. 7. Anno 1632, Julii 16, vidit Saturnum ansatum.

Anno 1630, Junii 20, FRANCISCUS FONTANA Neapoli vidit Saturnum cum globulis separatis, ut in *Fig.* 1, ut habet in observationibus, *Tract.* 7. Anno 1634 mense Aprili vidit Saturnum cum ansulis, ut in *Fig.* 4. Anno 1636, eadem forma observavit. Anno 1645, die 3 et 13 Decembris, vidit eum fere, ut in *Fig.* 5. P MATTHEUS TABERNA eandem observavisse formam videtur.

HUGENIUS pretium non magnum tribuit hisce observationibus. FONTANA enim quondam, judice HUGENIO, nimis monstrosas formas Martis planetae publicavit (2).

PETRUS GASSENDUS, Junio mense, anno 1633, Saturnum observavit cum ansulis, ut in *Fig.* 4, sicut refert in *Judicio de stellis novem circa Jovem.* Anno 1634, mense Aprili, Saturnum vidit, ut in *Fig.* 6. Anno 1636, mense Novembri, et anno 1637, mensibus Februario, Julio et Novembri, Saturnum vidit cum ansulis, ut in *Fig.* 4. Anno 1638, mense Decembri etiam vidit cum ansulis Saturnum, sed minime rotundum, ut in *Fig.* 7 aut 8. Anno 1642, sub initium Augusti mensis, vidit Saturnum solitarium, ac rotundum usque ad occasum ip-

(1) *Disquisit. Mathem.*, Concl. 44.

(2) Conf. HUGENII, *Opera Varia*, Vol. I. pag. 558.

sius heliacum, qui fuit mense Februario anni 1643; et sub finem Maji mensis, Saturnus heliacè ortus visus est recuperasse comites ejusdem albedinis rotundos, ac pene adhaerescentes, ut Galilaeus in *Fig.* 1; et sic permansisse, sub varia tamen comitum forma, usque ad mensem Martium anni 1644; mensibus Martio et Junio vidit Saturnum ut in *Fig.* 7, et postea, ut in *Fig.* 9. Sub finem anni 1645 vidit cavitates comitum sensim producere cuspides, ita ut utrimque contingerent globum medium, intercepto hinc inde lunulato obscuro interstitio; ipsis jam globulis in lunulas quasi hyperbolicas conversis, et ob cohaesionem cum globo medio ovi speciem exhibentibus, ideoque habitis pro ansulis, quia obscura illa interstitia, quasi foramina, apparebant; vide *Fig.* 10. At supra refert anno 1646, coepisse obscura illa interstitia obliterari ad cuspides, et annulus alborem suum quasi commiscere cum albore globi medii minus dilucide ab ipsis distincti. Anno 1647 autem ille narrat permansisse eandem formam anni praecedentis; alborem tamen visum confusiorem, et interstitia retusis cuspidibus rotundiora facta esse ac prominentiora versus vestigia, fere ut in *Fig.* 11, quam speciem durasse usque ad Saturni occasum heliacum anni 1648, mense Aprili. Anno 1653, die Aprilis 6 vidit, ut in *Fig.* 12. Anno 1655, mensibus Junio et Julio, vidit ut Galilaeus in *Fig.* 1 (1).

P. Nicolaus Zucchius observavit anno 1640, Maji die 23, Saturnum cum comitibus separatis, et cucurbitae vel pyri formam imitantibus, ut in *Fig.* 13. Anno 1657, die 18 Julii, scripsit ad Ricciolum in *Roma* sic: » *Saturnus pergit videri* » *sui majori stella disjunctus a duabus minoribus: sed telescopiis potentioribus* » *videtur observari prope ipsum stella valde iis minor, quae situm mutat sur-* » *sum deorsumquè et dextrorsum, ac sinistrorsum, et aliquando evanescit. Ut* » *autem constet, sitne eadem an variae stellae Firmamenti, quae inciderent* » *cum Saturno in eos situs, opus est magna diligentia et perseverantia in ob-* » *servando.*"

---

(1) Gassendus, *in Institutione Astronomica* Lib. III. pag. 131. *ait:* » *Adjiceremus Sa-* » *turno quoque circumferri duos asseclos, si qui duo orbiculi ad latera ejus interdum ap-* » *parent, eadem formâ constanter forent, et non interdum acuminarentur, exporrectisque* » *quasi brachiis, relictoque medio intervallo, quasi ansulae Saturno haererent; interdum* » *quasi unum idemque cum ipso corpus evaderent, prorectis contractisque hinc inde versus* » *extremas cuspides intervallulis, ac tanta varietate Saturni corpus transformarent, ut* » *exspectandum omnino sit quo usque tota et facierum et periodorum diversitas observata* » *sedulo fuerit, priusquam aliquid pronuncietur.*".

Bulialdus spectavit anno 1642, mense Augusto, Saturnum solitarium et rotundum. Et anno 1656 cum fascia ut in *Fig.* 14.

§. 6.

Ricciolus ipse et Grimaldus, anno 1643, die 29 Octobris Saturnum ejusque comites conspexerant, fere ut Zucchius, anno 1640, vide *Fig.* 13. Anno 1648, 26 Februarii et 16 Aprilis viderunt comites aequales inter se, et aeque distantes a Saturno, sic ut longitudo lucidae partis singulorum tanta esset, quanta semidiameter Saturni, ut in *Fig.* 11. At 15 Octobris comites jam a tergo juncti cum Saturno, faciebant cum eo ovalem *figuram* 7. Anno 1649, sub finem Martii, et ab Aprilis initio usque ad initium Maji et 20 Julii, quando Saturnus ortus est heliacè, itemque 27 Julii visus est ab illis, ut in *Fig.* 6; imo 23 Augusti et 29 Septembris; et diebus 12, 13 et 21 Decembris a Grimaldo. Sicut etiam anno 1650, die 2 Januarii, 18 Martii et 12 Octobris. Anno 1651, die 23 Aprilis Saturnus ab illo visus est *Figura media* inter 6 et 8. Anno 1652, Maji 29 vidit Saturnum ut in *Fig.* 6. Anno 1653, Decembris 6, vidit Saturni comites separatos ab eo, et piriformes, ut in *Fig.* 13; ita ut utrius libet longitudo esset sicut 13½ ad 18 ad Saturni longitudinem. Anno 1654 Januario fere toto viderunt Ricciolus et Grimaldus Saturni comites graciliores, et acute productos, ut in *Fig.* 11. Anno 1656 a die 9 Februarii ad 17 Julii visus est illis rotundus sine comitibus: sed 14 Maji cum fascia ut in *Fig.* 14. Anno 1657 Grimaldus vidit Saturni comites aliquando, ut in *Fig.* 13, aliquando ut in *Fig.* 15 Et in fine Decembris comites in parte Saturni propiore jam concavos, ut in *Fig.* 9, et cum fascia valde angusta. Anno 1658 Januarii 1 visus est Ricciolo et Grimaldo Saturnus, ut in *Fig.* 9; et in fine Januarii, fere ut in *Fig.* 11, cum fascia tamen infra centrum Saturni, et obliqua lineae comitum. Et Februarii 21, similior *Figurae* 11, observante Grimaldo. Longitudo partis candidae utriuslibet comitum aequalis erat semidiametro disci Saturni, pars autem obscura paulo brevior: Martio autem pene toto, comites longiores, sed magis magisque breviores mense Majo, usque ad 24 Junii. At Julii 10 visus est Saturnus deficere a *Fig.* 11 et brachia comitum prope Saturnum gracilescere. Anno 1661, die 13 Maji, nocte sequenti, Saturnus visus est ansatus, et cum comitibus ad latera ipsius dispositis, ut in *Fig.* 6.

P. Daniel Bartolus, Neapoli, anno 1644, mense Decembri, optimo P. Sersali telescopio observavit comitem superiorem minorem inferiori, ejusque um-

bram minus obscuram: utriusque autem umbrae figura vergebat ad parabolicam, ut in *Fig.* 16, crura autem comitum juncta erant Saturno.

§. 7.

De HEVELIO plura dicere possumus, quippe qui multam dedit operam investigandae faciei variisque phasibus, sub quibus se Saturnus ostendebat, ut docent duo ejus opera, alterum: *Dissertatio de Natura Saturni facie ejusque variis phasibus, certa periodo redeuntibus, Gedani* 1656. alterum *Selenographia.* Pag. 1 operis, prioris, sic loquitur: »Saturnum nempe non esse simplex corpus »rotundum, uniforme, sicuti reliquorum planetarum fixarumque omnium; sed »ex tribus corporibus conflatum, admirabilis omnino, et quidem multiformis, ac »variabilis figurae; modo namque corpus intermedium est ellipticum, duobus »brachiis arctè ab utroque latere suffultum, quae diversis sui cursus temporibus »paulatim dilatantur, vicissim conprimuntur; modò corpus intermedium circu»lare duobus stipatur globulis, tam oblongis acuminatis majoribus, quam ro»tundis minoribus; modo etiam visitur perfectè rotundus, nudusque: sic ut alio »tempore sit elliptico-ansatus, alio sphaerico-ansatus, alio sphaerico-cuspidatus, »alio triglobosus seu trisphaericus, alio etiam rotundus solitarius, sive mono»sphaericus. Quae phaenomena, ut doctioribus multum profecto hactenus fa»cesserunt negotii, ac molestiae crearunt, ita omnes ingenii nervos intenderunt, »ut ea penitus investigarent, ac detegerent. Id quod etiam, Divino annuente »Numine, aeque ac in nonnullis aliis rebus astronomicis hucusque incognitis fe»liciter successit; ut inde haud malè colligere liceat, tempus istud, ratione scili»cet Saturni propemodum venisse, de quo summus Philosophus SENECA, Lib. 7. »Natural. Quaest. loquitur: *Veniet tempus quo ista, quae nunc latent, in lu»cem dies extrahat, et longioris aevi diligentia.*"

Illa praedictio, ut videbimus, postea a nostrate HUGENIO perfecta est.

HEVELIO ad manum erat extraordinariae longitudinis telescopium, centum et quinquaginta pedum, cujus in campo extra Gedanum urbem positi ope Saturnum, mensibus Septembri, Octobri atque Novembri 1645, ansis praeditum; mense Septembri 1647 illum vidit forma elliptico-ansata, ut in *Fig.* 16; sicut etiam Decembri 1648, 23 Decembris 1649, Octobri 1650, Octobri et Novembri 1652; mense Novembri 1651 fere sphaerico-ansata, uti in *Fig.* 7. 30 Maji 1655 trisphaerica, et inde a 25 Februarii usque ad 2 Maji 1656 monosphaerica.

Causam variarum phasium explicare se posse opinatur ex opticis legibus, secundum varios situs Saturni in cursu trigenario, quod attinet ad solem et ter-

ram, coque consilio ponit, Saturnum suam lucem a sole accipere, atque, ut ipsius verbis utamur: »Saturnum revera esse tricorporeum, et omnino talis spe»ciei, quali est *Fig.* 12 adumbratus: medium nempe corpus non esse rotundum; »sed ellipticum; duo laterones ejus non esse globosa, ac peculiaria circum Sa»turnum mobilia: sed firmiter circa partes superiores et inferiores adhaerentia »corpora, instar brachiorum, figurae fere hyperbolicae, ac certo, et inmutabili »interstitio, circa medium, a medio corpore remoto; mobilia tamen una cum »corpore intermedio, circa unicam axem certâ periodo."

Ex suis aliorumque astronomorum observationibus, ab anno 1612 usque ad 1656 factis, explicat phasium Saturni vicissitudinem, ut in *Fig.* 27 proponitur, ponitque Saturnum, praeterquam in circulo excentrico circa solem, adhuc in epicyclo moveri. Ecce ejus explicationem: »Esto igitur in schemate, *Fig.* 27, »A sol cuncta videns muudi totius oculus, sive centrum totius universi; circulus »ex isto centro, nimirum ex sole ductus FFFF, orbis magnus, in quo terra F »motu annuo movetur, B punctum eccentricitatis Saturni: in hoc eccentrico cen»trum C movetur secundum seriem signorum epicycli aequatorei, seu aequantis »Saturni, in ipso vero epicyclo, ipse Saturnus; et quidem hâc ratione, quando »centrum epicycli aequatorei C fuerit in Sagittario, nimirum apogaeo, tunc »Saturnus possidet in aequante punctum G centro eccentrici B proximum; »quando verò centrum circelli fuerit in Capricorno, tunc planeta tanto spatio, »juxta ordinem signorum, distat ab L, inferiori parte aequantis, quanto spatio »centrum C epicycli Capricorni, a centro epicyclo apogaei removetur, sic ut »angulus LCE, angulo GBL semper sit aequalis: hoc est, motus epicycli aequa»torei est commensurabilis motui planetae in ipso aequante. At quando cen»trum epicycli versatur in perigaeo, nempe geminis, tunc Saturnus est in H, a »centro B remotissimus. Hinc diversae oriuntur inaequalitates. Prima constat »angulis BCA, et CAE; secunda, ex motu annuo trahit ortum, atque angulo FEA »comprehenditur. Linea medii motus solis est AF, planetae vero BC, ac veri »loci FE. Oppositio planetae existentis in apogaeo G, accidit, quando terra ver»satur in I; vicissim conjunctio, quando terra consistit in K. Itaque terra am»bulans ab I, M versus, posito Saturno in Apogaeo, ostendit planetam retrogra»dum, in M vero stationarium, vel potius tardum; item ab MKN versus direc»tum in N vero vicissim stationarium, et ab NI versus itidem directum, adeo ut »Saturnus circa K semper velocior, quam in M et N appareat."

Quas varias phases, natas e variis sitibus Saturni, ab Hevelio nominatas, nos brevitatis causa in sequenti tabula proponemus.

Phases Saturni ex opinione Hevelii.

Vid. *Fig.* 27.

		Sign. Gr.	Denominatio Figurarum Heveliana.	Fig.
Apogaeum	1	♐ 27	Elliptico-ansatus plenus.	12
Phases decrescentes.	2	♑ 12	Elliptico-ansatus diminutus.	16
	3	♑ 27	Sphaerico-ansatus.	7
	4	♒ 12	Sphaerico-cuspidatus major.	
	5	♒ 27	Sphaerico-cuspidatus minor.	9
	6	♓ 12	Trisphaericus.	18
Med. Dist.	7	♓ 27	Monosphaericus.	19
Phases crescentes.	8	♈ 12	Trisphaericus.	18
	9	♈ 27	Sphaerico-cuspidatus minor.	9
	10	♉ 12	Sphaerico-cuspidatus major.	
	11	♉ 27	Sphaerico-ansatus.	7
	12	♊ 12	Elliptico-ansatus diminutus.	16
Perigaeum	13	♊ 27	Elliptico-ansatus plenus.	12
Phases decrescentes.	14	♋ 12	Elliptico-ansatus diminutus.	16
	15	♋ 27	Sphaerico-ansatus.	7
	16	♌ 12	Sphaerico-cuspidatus major.	
	17	♌ 27	Sphaerico-cuspidatus minor.	9
	18	♍ 12	Trisphaericus.	18
Med. Dist.	19	♍ 27	Monosphaericus.	19
Phases crescentes.	20	♎ 12	Trisphaericus.	18
	21	♎ 27	Sphaerico-cuspidatus minor.	9
	22	♏ 12	Sphaerico-cuspidatus major.	
	23	♏ 27	Sphaerico-ansatus.	7
	24	♐ 12	Elliptico-ansatus diminutus.	16

Non opus est ut Hugenii sententiam de Hevelii observationibus audiamus, postea enim videbimus, qua ratione hic ipse de Saturno judicaverit.

Hevelium tamen, ut ab ipso ad alium transeamus, de Saturno nil nisi falsa cognovisse, ex eo elicere licet quod pagina 44 operis sui de *Selenographia* legimus: »Qualia corpora sint brachiola Saturni nondum definiri potest."

§. 8.

Sequitur EUSTACHIUS DE DIVINIS (alio atque proprio nomine FABRI dictus) qui schema edidit (1) annis 1646, 1647 et 1648, ut videtur *Fig.* 20. Is cum praestantissimus esset perspicillorum artifex emendatiorem certe Saturni faciem nobis exhibuit. Videtur tamen umbras illas quae in schemate apparent de suo adjecisse.

Quamprimum temporis ordo nos ad HUGENIUM perduxerit, videbimus EUSTACHIUM DE DIVINIS contra HUGENIUM de Saturni forma contendisse, ab eoque convictum esse ratione probabili.

Pervenimus ad ROBERVALLIUM ab HUGENIO summum geometrum dictum (2). Hic Saturnum non vidit, certe non vidisse se dicit, sententiam tamen de eo talem habebat: ut egrederentur e zona torrida, id est, ea quae rectiores solis radios excipit, vapores quidam non admodum spissi, qui procul a superficie ejus in sublime evolantes, undique illum ambeant, praeterquam polos versus, ubi fortassis intensum frigus eos a sole attrahi prohibeat. Hi si quando omne spatium complent a Saturno usque ad extremam ipsorum regionem, elliptica forma, inquit, eum videri faciunt. Cum vero minus densi exoriuntur, interque eos ac Saturnum locus ingens medius relinquitur, ob tenuitatem solares radios non reflectunt, nisi inde ubi magis conferti iisdem opponuntur; quod nostri respectu necesse est fieri in partibus a medio disco Saturni remotioribus. Sic sententiam ROBERVALLII exposuit HUGENIUS et brevitatis causa lectorem benevolum ad ipsum dimittere liceat.

Sequitur ANTONIUS MARIA DE RHEITA. Hic initio Februarii anni 1653, vidit (3) Saturni comites tanquam flammas producentes, forma pyramidali, ut in *Fig.* 13. RICCIOLUS narrat (4) sententias Rheitenses de Saturni forma, comitibus ejusque lumine et umbra, quas explicavit in opere suo, *de Radio sidereo mystico* Lib. IV. Cap. IV. Sed non est quod sententias ejus hoc loco enumeremus, inveniri enim possunt apud RICCIOLUM et praeterea non magni momenti sunt.

---

(1) Vid. HUGENII, *Opera varia*, Vol. II. pag. 557.

(2) Vid. HUGENIUS, *in opere jam laudato*, pag. 561. RICCIOLUS, *in opere jam laudato*, *Astronomia Reformata*, Lib. X. Cap. IX. pag. 365. LA LANDE, *Astronomia*, Ed. III. Lib. XX. §. 3349. MONTUCLA, *Histoire des Mathematiques*, Tom. II. Part. IV. Liv. IX. pag. 549.

(3) RICCIOLI, *Astronomia Reformata*, Lib. X. Cap. IX. pag. 364.

(4) RICCIOLI, *Almagestum novum*, pag. 723 et 724.

Transeamus ad JOANNEM BAPTISTAM HODIERNAM, qui, ut HUGENII verbis utar (1), » E Sicilia systema suum Saturnium ad nos misit. Hic enim anno 1655 et anno » sequenti exeunte orientalem globulum reliquo minorem sibi apparuisse scribit, » quum tamen eodem tempore nobis inspectantibus, eadem utrique magnitudo, » claritas ac figura affuerit, non quidem orbicularis, sed recta illo in longitudi- » nem utrinque a Saturni disco procedens."

Afferenda quoque hoc loco sunt verba RICCIOLI (2), qui ait: » JOANNES BAPTIS- » TA HODIERNA censuit Saturnum spheroïdem in modum ovi, aut pruni, et lon- » giorem HEVELIANO; in eoque binas esse maculas lucis expertes, ut in *Fig.* 8 » aut 5. Putat porro Saturnum converti circa axin suum; eadem periodo, qua » statuit HEVELIUS, et rotundum tunc videri, cum longior sphaeroidis axis ad nos » dirigatur." Sed HUGENIUS ejus sententiam refutavit, dicit enim » cum Saturnus » prorsus rotundus appareat quoties brachiis nudatus est, quomodo explentur » lacunae, quas a duabus maculis nigris superfuturas fatetur HODIERNA? Et recta » omnino nobis videtur haecce HUGENII refutatio, nam si quis ovum istis maculis » circumvolvat circa axem, videbit multas phases apparere longe diversas ab his » quae in Saturno apparent."

Verbo quoque dicendum est de ZUPPO, qui *Neapoli* 16 Januarii 1654 Saturnum vidit (3), ut in *Fig.* 21 tali forma, quae ab ea, quam vidit RICCIOLUS, non differt, nisi magnitudine, quod majori telescopii longitudini tribuendum videtur.

§. 9.

Par est, ut quum disputandi ratio nos ad omnium quos enumeravimus, astronomorum ejus temporis principem HUGENIUM perduxerit, ut paulo copiosius de eo dicamus. *Primum*, igitur referemus, quae de annulo Saturni observavit HUGENIUS; *deinde* explicationem, quam ipse suarum observationum dedit; *postremo* litem HUGENIUM inter et EUSTACHIUM DE DIVINIS.

HUGENIUS (4) primum telescopium adhibuit, quod duodenos pedes non excedebat, duobus vitris convexis instructum quorum id, quod oculo vicinum erat, radios parallelos cogebat ad paulo minus trium pollicum sive unciarum pedis

---

(1) HUGENII, *Opera Varia*. Vol. II. pag. 559.
(2) RICCIOLI, *Astr. Reform.* Lib. X. Cap. IX. pag. 364.
(3) *Ibidem*, pag. 364.
(4) Vid. HUGENII, *Opera Varia*, Vol. II. pag. 537.

Rhenolandici distantiam; hocce telescopio vidit, Saturnum (1) die 25 Martii 1655 cum brachiis utrimque secundum rectam lineam extensis, ut in *Fig.* 22 haec brachia ei videbantur in fine extremo crassiora esse, quam apud discum planetae; hanc formam servare videbatur planeta donec in solis radios evanesceret; Saturnus iterum e radiis solis evadens primum ab HUGENIO conspectus est die 16 Januarii 1656, hora decima nocturna, quia HUGENIUS interea temporis absens fuerat. Sed tunc observavit, Saturnum brachiis destitutum esse, et plane rotundum, ut alii quoque eum exeunte mense Novembri superioris anni observaverant, ita quoque eandem formam servabat, donec iterum in radios solares subiret, ut in *Fig* 23.

Dein HUGENIUS majorem tubum (2) fabricatus est 23 pedum e ferri bractea, qui visa centies amplificabat, et quo die 19 Februarii primum usus est.

Jam die 25 Martii 1656 observationes, quas hocce tubo fecerat edidit (3): sed tamen, ut ante anno 1610 GALILAEUM fecisse vidimus, literis permixtis. Sunt hae literae sequentes:

aaaaaaa ccccc d eeeee g h iiiiiii llll mm nnnnnnnnn oooo pp q rr s ttttt uuuuu.

(4) Die 13 Octobris ejusdem anni hora sexta antemeridiana, Saturnus iterum apparere coepit, ut et brachia, quae per tubum 12 pedum sub eadem forma vidit, ut ante; sed quum majore tubo 23 pedum uteretur, extremi fines brachiorum ipsi tenuiores apparebant, ut in *Fig.* 24 quam formam veram esse putabat.

Fascia autem illa seu zona obscurior, quam supra planetam observabat, ipsi nunc apparebat paulo inferior brachiorum linea, cum antea superior visa fuisset; et planeta sine brachiis apparens, per ejus centrum ibat. Die 26 Novembris brachia latiora fiebant, et prope planetam minus lucere videbantur, quam in extremis cuspidibus; anno 1657 die 17 Decembris Saturno iterum radiis solaribus emerso, HUGENIUS brachia prope discum, adaperta ac bifida invenit, qualia ante non viderat, ita ut nunc ansis similia essent, ut *Fig.* 25. Sic etiam zona obscura magis in partibus inferioribus erat; et hac quidem figura permansit donec rursus radiis solis occultaretur.

Anno 1658 Nov. 10, hora 6½ matutina, postquam heliacè ortus esset Saturnus, latius aperiri videbantur ansae, quamquam ob humilem sideris statum, ob sur-

---

(1) *Ibidem*, pag. 541.
(2) *Ibidem*, pag. 544.
(3) *Ibidem*, pag. 526.
(4) *Ibidem*, pag. 545.

gentes prope horizontem vapores. et ob clariorem aurorae lucem non admodum distincte discerni possent.

Anno 1659 die 12 Februarii hora sexta matutina, Hugenius ansarum formam accurate observare poterat, ut in *Fig.* 26; qua forma mansit Saturnus usque ad finem Martii. Finem tum fecit Hugenius observationum, et nunc Gryphum, quem anno 1656 ediderat, latius explicare ausus est: quae literae proprio singulae loco positae, hanc significationem habebant:

Annulo cingitur, tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato.

§. 10.

Explicatio Hugenii, *de phasibus annuli, ex eventu observationum evoluta, per totam revolutionem Saturni circa solem.*

Transeamus ad eam de Hugenio disceptationis partem, quae explicationem ejus observationum continet.

(1) Harum observationum habita ratione, statuebat planum annuli semper fere in plano aequatoris terrae jacere, et ita cum angulo $23°\frac{1}{2}$ ad eclipticam inclinare, quia Hugenius variis methodis in Systemate Saturnio memoratis, putabat se reperisse majorem axem elliptici annuli semper fere paralleliter se movere, cum plano aequatoris terrae (2). Hancce orbitam proponebat literis ABC; *Fig.* 28, eamque Saturnus cum annulo per 30 fere annos describebat; statuens EF esse orbitam terrae in eodem plano sitam, et G solem in medio utriusque orbitae positum.

Quum autem Hugenius statueret, et Saturnum, et annulum obscura corpora esse, quae lumen quod reflectebant, a sole acciperent; inde sequatur necesse est, annulum variis formis a nobis conspici, quoniam, dum Saturnus orbitam ABC describit, terra eodem temporis spatio orbitam suam EF fere trigesies percurrit.

Existunt primo in orbita duo loca, sibi invicem opposita; A et C, in quibus annulus latissimus apparet; et Saturnus latissimis ansis instructus esse videtur: idque locum habet, quum planum, quod per centrum terrae et Saturni transit, et perpendiculariter in orbitam Saturni cadit, planum annuli etiam cum angulis rectis secet.

---

(1) Hugenii, *Opera Varia*, Vol. II. pag. 570 et seq.

(2) *De vera annuli inclinatione deinde dicemus et videbimus,* Hugenium *primum eam minorem et deinde majorem assumsisse. Sufficiant haecce ad* Hugenii *opinionem a priori intelligendum.*

Accedit, oculo nostro, quum circiter 23° supra planum annuli elevatus est, eum maximum videre. Idque judice HUGENIO locum habet, cum Saturnus $20^\circ\frac{1}{2}$ in Geminis et in opposito $20^\circ\frac{1}{2}$ in Sagittario est.

Deinde HUGENIUS transit ad contemplandas causas, ob quas ansarum latitudo paulatim constringatur (1); cum nempe planeta v. c. est in H vel I vel in opposita directione in O vel P, tum, quia oculus hac positione non tam elevatus est supra planum annuli, annulum minus apertum adeoque ellipsin angustiorem videbimus; Saturno in K vel L, in opposita loca N et M veniente minor ellipsis diameter etiam constrictior videbitur, quoniam planum annuli obliquius observamus

Saturno magis magisque a statu suo remoto, et in Q et R aut S et T se habente, ellipsis annuli tota constringitur, et rima propter exilitatem et reliquae corporis partis splendorem, non amplius videri potest, et planeta Saturnus eadem forma apparet, ut ab HUGENIO annis 1655 et 1657 observatus fuerat; vid. *Fig.* 24.

Superest, ut phases rotundos explicemus judice HUGENIO (2).

Quum nempe Saturnus est in B vel D, et planum annuli cum plano terrae coincidit, ita ut tenuis margo annuli ad nos non satis lucis reflectat, ut videri possit, et Saturnus nobis omnino rotundus sine brachiis, aut ansis apparet; hoc locum habet, quum Saturnus $20^\circ\frac{1}{2}$ in Piscibus et $20^\circ\frac{1}{2}$ in Virgine est. Primum hoc phaenomenon observavit GALILAEUS anno 1612, et GASSENDUS, aliique, 30 annis post; et HUGENIUS anno 1656. Exinde igitur concludere licet, hoc decimo quarto vel decimo quinto quoque anno locum habere.

Deinde duas adhuc causas proponit HUGENIUS, quibus annulus e conspectu evadere possit. *Primo*, cum planum annuli intra nos et solem transit, Saturno prope D, nobisque cum terra in E existentibus. Itaque superficiem annuli, sole collustratam, videre non possumus, sed tantum obscuram superficiem ad nos conversam. *Secundo*, cum planum annuli cum sole coincidit, ita ut tantum tenuis margo radiis solis collustretur: itaque annulus a nobis videri non potest, etiamsi planum ad nos conversum sit.

Superest, ut HUGENII opinionem de zona nigra, apud planetam observata, explicemus Hanc zonam semper videbat in disco planetae ab hoc ad illud latus

---

(1) HUGENII, *Opera Varia*, Vol. II. pag. 573.
(2) *Ibidem*, pag. 575.

finientem incipientemque, quo loco extremus annuli margo projicitur, ut apparet ex *Figuris* 22, 23 et 24.

Quum hicce exterior margo etiam toti soli expositus sit, ut et planum annuli, et quum oculus, in omni observatione, prae illustrato plano annuli elatior sit quam sol, nihil umbrae ejus exterioris marginis spectari potest. Hanc ob rem nigra constitui non poterat umbra annuli, quae in Saturni discum cadit. Exinde igitur jure efficiebat Hugenius, nigram zonam a se visam nil aliud esse, nisi exterioris marginis projectionem in Saturni discum qui tam crassus esset, ut in plano illustrato conspicaretur, et non satis luminis reflectere, quod extra discum in coeli planitiem caeruleum projectum, observari possit (1).

Nunc, post ea, quae diximus, unicuique patebunt causae, ob quas brachia evanescerent, et annulus videri non posset.

Quum autem obscuram faciem annuli totam ad nos conversam sit, planetam rotundum sine brachiis videri necesse est, sed sub inclinante annuli; et tum ejus ut et marginis projectio una efficit supra Saturnum zonam quamdam omnino obscuram.

§. 11.

Oppositio Fabri *contra* Hugenium, *sub nomine* Eustachii de Divinis, *qui aliud systema finxit.*

Tertia de Hugenio disceptationis pars nos duxit ad litem eum inter et Eustachium de Divinis. Hic nempe ad eos pertinebat qui contra astronomicas Hugenii observationes multa in medium proferre conabantur. Non tantum verbis, sed et scriptis Eustachius de Divinis eum oppugnabat edito libello acerrimo cujus titulus est: *Eustachii de Divinis Septempedani, brevis annotatio in systema Saturnium Christiani Hugenii ad serenissimum Principem Leopoldum, Magni Ducis Hetruriae Fratrem:* qui libellus in Hugenii *Operibus* variis reperitur. Etiamsi haec opera in multorum manibus sint, continet tamen quaedam hoc loco memoratu dignissima; primum, quod Hugenio opponit, argumentum inde duxit Eustachius, quod tubi, quibus ipse utebatur, Hugenianis omnino praeferendi essent et non dubitat indicare Hugenium ejus tubo ad observandum, usum fuisse (2). Deinde quod ad obscuram zonam in disco planetae, dicit hocce

---

(1) Herschelius *id cum monstrosis tubis perspicere poterat, sed de hoc in posterum dicendum est.*

(2) Hugenii, *Opera Varia*, Vol. II. pag. 601, 602 et 604.

phaenomenon omnino vitrorum vitio esse tribuendum (1). Ferre non potest Hugenium loqui de Saturnicolis, putans scilicet catholicis dogmatibus hoc repugnare. Huc accedit, Eustachio judice Hugenium non per satis longum temporis spatium observasse, quam, ut inde aliquid certi concludi possit (2). Deinde hypotheses refert ab amico suo Fabro fictas, quas veras esse putat; et de quibus sententiam suam dicit, etiam quod ad Saturnum ejusque annulum, in 23 argumenta, quae copiosiora sunt, et parum scientiae utilitatisque continent, quam ut hoc loco memorentur: quaeque legi possunt in Hugenii *Operibus variis* (3). Haec pauca de iis sufficiant: statuebat nempe, terram immobilem in medio mundi esse, circa quam omnia coelestia corpora moveantur; quae thesis ipsi cum catholicis decretis, literis sacris, observatis phaenomenis, et recta ratione convenire videbatur. Porro narrat, se quinque satellites apud Saturnum observasse, quorum ille, qui ab Hugenio die 25 Martii anno 1655 primum detectus erat, longissime a planeta distaret, caeteri quatuor tum annulum ab Hugenio falso observatum formare deberent. Hos discernit in duos lucentes et duos obscuros satellites, et exinde omnia phaenomena explicat a se aliisque observata.

Statuit enim, si Saturnus apparet omnino rotundus et sine satellitibus, (remotissimum ab Hugenio detectum hoc loco excludit,) inde hoc effici, quoniam duo lucentes a duobus obscuris satellitibus obtegantur; tum duo lucentes a planeta videri posse, quum iterum ex hacce obtectione evaderent, idque etiam locum habere; etiamsi inter se invicem conjuncti essent si obscuri in apogaeo et lucentes in perigaeo essent: statuebat etiam lucentes quidem ut ansas et falcatas lunas apparere idque locum habere cum lucentes partim ab obscuris obtegerentur.

Hacce opinione confirmabatur Eustachius, quia illo judice satellites arithmetica progressione accrescebant; uti nempe terra unum satellitem (lunam nostram) habere, ita solem duos tales habere, nempe Venerem et Mercurium, itaque Martem tres habere putabat, quos tamen nemo unquam vidisset propter nimiam digressionem a planeta primario; eodem modo Jovem quatuor habere, qui jam a Galilaeo primum observati essent, quia hi non tam longe a planeta primario remoti essent quam Martis satellites: exinde igitur sequi necesse putabat Saturnum quinque satellites habere. Conjectura profecto bene excogitata!

Hugenius autem animo tranquillo et honesto acerrimos falsosque Eustachii de Divinis impetus refutavit, scripto libello, cui titulus est: Christiani Hugenii

(1) *Ibidem*, pag. 606 et 607.
(2) *Ibidem*, pag. 608 et 609.
(3) *Ibidem*, pag. 610 — 618.

ZULICHEMII *brevis assertio systematis Saturnii sui, ad serenissimum Principem Leopoldum ab Hetruria*, et qui in *Operibus Variis* insertus est. Primum (1) HUGENIUS eum rogat, quare, cum optimos haberet tubos opticos et jam ab anno 1646 aut fortasse prius, Saturni phases diligenter observasset, ejus satellitem non prius vidisset. Sic quoque miratur zonam nigricantem ab EUSTACHIO non visum fuisse, quae tamen jam in *Anglia* observata fuisset (2). Sic quoque apparet ex schemate a BALLIO ad HUGENIUM misso, illam fasciam a 5 Februarii 1656 ad 2 diem Julii proxime sequentem, supra medium planetam apparuisse, dum illo tempore Saturnus rotundus et sine ansis appareret. Sed simul memorat, quum, ansae postea iterum apparerent, fasciam difficilius observari posse atque adeo quod ad situm minus recte a BALLIO depingi. Apparet quoque ex HUGENII *adversariis*, lineam nigram 26 Nov. 1656 manifeste videri potuisse. Fatetur tamen eam postea difficilius potuisse observari, id quod omnino ejus systemati convenit et tribuendum erat magnae inclinationi annuli, qua ansarum splendor duplicaretur, et sic lineam accurate observari non posse (3).

Patet quoque ex epistola a nobili, erudito, acerrimoque ingenii viro quodam e *Francia* ad HUGENIUM scripta, EUSTACHIUM sibi nimis in tubis suis opticis placere; quum ille jam anno 1660 *Romae* eos apud EUSTACHIUM viderat, inter alia haec ad HUGENIUM scribit (4):

» Il me montra les plus beaux de ses telescopes, qui passent au delà de 30
» pieds; et nous les comparames avec un de ceux de la méthode du Chevalier
» NEAL, qu'on a envoyé au Cardinaal GHISI; il n'a gardé de ne tirer l'avantage
» de son costé, mais sans mentir il se trompe lourdement."

Porro narrat HUGENIUS BALLIUM (at saltem ex ejus schemate apparebat) annulum Saturni a 5 Nov. 1656 ad 9 Jul. 1657, eadem forma vidisse qua se, hoc tamen discrimine, quod ille brachia ubique paulo crassiora referat, ut in *Fig.* 26. A 9 Nov. 1657 ad 7 Jan. 1658 ejus pictura omnino cum Hugeniana convenit, praeterquam quod ad situm zonae obscurae. A 3 Jan. 1659 ad 17 Jun. ejusdem anni, apertas ansas adhuc paulo latiores videbat.

---

(1) HUGENII, *Opera Varia*, Vol. II. pag. 622 et 623.

(2) *Hoc liquet ex literis viri clarissimi* JOH. WALLISII, *Oxonia ad* HUGENIUM *datis* 22 *Dec.* 1658, *quibus inter alia haec scribet.* » *Monebam etiam iisdem litteris* (nempe datis » 29 Maji 1656) *de Saturni fascia, quam jam ante observaverat* D. BALL *et sciscitabar num* » *tu eundem conspexeras*," etc. Vid. HUG., *Opera Varia*, Vol. II. pag. 625.

(3) HUGENII, *Opera Varia*, Vol. II. pag. 625.

(4) *Ibidem*, pag. 626.

Comparabat autem HUGENIUS (1) EUSTACHII ridiculum systema de duobus lucentibus totidemque obscuris globis, quorum duo priores solis radios reflectunt et duo posteriores, natura sua obscuri sint, cum ludo alborum nigrorumque calculorum, quorum alter vicissim apparet et evanescit. Sed non intelligebat, qua ratione ex hisce globulis aliquando majores crescere possint, ut apparet, v. c. quum figuras 1 et 18 cum 7 et 8 conferamus; diametri enim priorum dimidiam magnitudinem non habent atque illi ipsius Saturni, quum posteriores iis similes sint vel etiam majores.

EUSTACHIUS DE DIVINIS hoc loco HUGENIO respondit scripto quodam sub titulo: EUSTACHIUS DE DIVINIS, *Septempedanus*, *pro sua annotatione*, *in systema Saturnium* CHRISTIANI HUGENII *adversus ejusdem assertionem*. Romae M.DC.LXI. Abjecit tum errorem suum quod attinet ad systema Hugenianum de Saturni annulo. Et observationes amici FABRII ad HUGENIUM misit quas ille cum suis compararet (2).

§. 12.

Nunc sequantur astronomorum nonnulli, qui etiam quodammodo a Hugeniana sententia differrent eamque non acciperent; sic v. g. jam saepe memoratus RICCIOLUS cujus sententiam propterea quod nimis effusa sit et parum scientiae contineat praetermittemus, tantum dicentes eum pro Hugeniana potius hanc ponere (3):

» *Armilla cingitur tenui*, *plana*, *elliptica*, *duobus locis cohaerente*; *sive pa-*
» *rallela aequatori*; *sive in se circumvolubili*, *aut libratili versus Mundi polos.*"

Ex hacce thesi jam totum RICCIOLI systema conficere possumus.

Porro RICCIOLUS memorat JOSEPHUM CAMPANUM, qui excellentissimis a se fabricatis telescopiis Saturnum observavit, annis 1663 et 1664, cinctum circulo verosimiliter elliptico, et addit: partem superiorem, ad polum arcticum situm corporis Saturni tegi ex parte armilla; contra vero inferiorem armillae partem austrum versus, seu antarcticum situm tegi ex parte a corpore ipso, seu globo Saturni.

CASSINUS (JEAN DOM.) putabat (4) Saturnum cinctum esse satellitum multitudine, qui, quum proximae inter se invicem juncti essent et circa se invicem volveren-

---

(1) HUGENII, *Opera Varia*, Vol. II. p. 633.
(2) Vid. *Opus suum*, pag. 83.
(3) RICCIOLI, *Astron. Reform.*, Tom. I. Cap. IX. pag. 366 et 367.
(4) MONTUCLA, *Hist. des Mathematiques*, Tom. II. Part. IV. Liv. IX. pag. 549.

tur, itaque phaenomena illa mirabilia efficerent. Sed audita Hugenii sententia, suam cum Hugeniana permutavit.

At vero mirum est, quod Montucla nobis narrat, Galletum phases, quas in Saturno viderant, nihil aliud putavisse, quam visus illusiones; ecce ejus verba (1): » On a seulement vu en 1684 un astronome d'Avignon (M. Gallet), homme » assez connu, et même avantageusement par quelques observations et divers » écrits, pretendre que toutes les apparences de Saturne, aussi bien que celles » de Jupiter, n'etoient que des illusions occasionnées par les réfractions des ver» res. Cette idée absurde n'a pas même eu les honneurs d'une refutation." Undenam haec habeat Montucla non indicat, esse autem ingentem falsitatem, appareat ex *Ephemeridibus Eruditorum Galliois mensis Junii* 1684. N°. XVII. Quarum excerpta reperimus in *actis Eruditorum anno* MDCLXXXIV publicatis *Lipsiae* Calendis Septembris pag. 423; ad quae iterum redibimus in Cap. V. §. 16, et unde tunc patebit, illum diligentia, quae illo tempore mirabilis erat, annulum observavisse.

§. 13.

Non tantum virorum doctorum sententiae et experientia omnium optima magistra docuerunt Hugenii hypothesin verissimam esse, sed et ipsius simplicitas, quae in multis veri sigillum est, certissime demonstravit; hocce igitur Hugenianum systema, omnem quam meretur, laudem summam nactum est et ut pateat, quomodo tota eruditorum cohors per omnem terrarum orbem illud admirata fuerit, laudum ei tributarum quaedam specimina hoc loco referre lubet.

Sic dicit Dionysius du Séjour (2): » M. Huygens donna enfin (anno 1655) la » véritable explication de ses phénomènes. Il fit voir que toutes ces apparences » sont occasionnés par un anneau fort mince et presque plan, dont Saturne est » environné. Cette brillante découverte eut le sort de toutes les nouveautés; elle » éprouva des contradicteurs même parmi les astronomes. Eustache de Divinis, » ou plutôt le Père Fabri sous ce nom, contesta l'explication de M. Huygens. Il » reconnut depuis qu'il s'étoit trompé, et l'explication de M. Huygens a reçu du » tems, le sçeau de la demonstration."

Lalandius dicit (3): » Personne avant Huygens, ne comprenoit la veritable

---

(1) Montucla, *in opere supra laudato*, pag. 551.

(2) Dionis du Sejour, *Traité analytique des mouvemens apparens des corps celestes*, Tom. II. pag. 233.

(3) La Lande, *Astronomie*, Tom. III. Liv. XX. §. 3350. Éd. III.

» cause de ces apparences; il donna son explication avec la découverte du satellite » de Saturne (*Syst. Saturn.* 1659); elle fut attaquée à Rome par le P. Fabri » sous le nom de *Eust. de Divinis;* mais Huygens répondit d'une manière victo» rieuse (*Brevis assertio system. Saturnii*, Hagae Com. 1660)."

Sic dicit Montucla, postquam systema Hugenianum explicaverat (1): » L'expe» rience de près d'un siècle a montré qu'elle étoit juste, et même tous les astro» nomes de son temps, frappés de sa simplicité et de sa justesse, l'adoptèrent » comme par acclamation."

La Placius (2): » L'anneau de Saturne est un des phénomènes les plus singu» liers du système du monde. Huygens donna le premier la véritable explication » de ces apparences, en lui supposant la figure d'une très-mince epaisseur d'une » largeur égale environ au tiers du diamètre de Saturne, et dont le centre est le » même que celui de cette planète."

Et Delambrius (3): » Huyghens ayant construit de plus grandes lunettes, dé» couvrit la cause de ces apparences si extraordinaires, et il l'exposa en 1659, » dans *Systema Saturnium*. Cette explication est aujourd'hui reçue universelle» ment, et elle a été confirmée par toutes les observations, faites et calculées » depuis."

Sic plura etiam afferre possemus celebrium astronomorum testimonia, nisi et instituti ratio et dissertationis ambitus vetarent.

Et tamen putat Bianchi Cattajonensis (4), ex epistola quadam a Galilaeo, ad

---

(1) Montucla, *Hist. des Mathematiques*, Tom. II. Part. IV. Liv. IX. pag. 549.

(2) *Memoires de l'Academie des Sciences*, 1787, pag. 249.

(3) De Lambre, *Astronomie theorique et pratique*, Tom. III. Chap. XXIX. pag. 83.

(4) *Astronomische Nachrichten*, N°. 252. pag. 199. Quod est opus Bianchi Editori scriptum, datum Cattajone, 11 Augusti 1833. in quo ita dicit: » Intanto, giacchè l'argomento di » questa lettara è sull' anello di Saturno, Ella mi permetta che io tocchi e reclami un picciol » vanto all' Italia, che sembra spettarle di giustizia e che non dimeno è dimenticato comunemen» te. Senza togliere all' Ugenio una minima parte di merito nella scoperta dell' anello di Sa» turno e nella vera dottrina delle sue apparenze, parmi che al Galileo pure debba conceder» sene una special gloria. Eccone in appoggio un passo tratto dalle opere dell' Italiano (Nella » terza lettera su le macchie solari a Marco Velsero). » » So non che dire cosa risoluta in » » caso cosi strano, inopinato e nuovo (per una disparizion allor avvenuta dell' anello); la bre» » vità del tempo, l'accidente senza esempio, la debolezza dell' ingegno e il timore dell' errare » » mi rendono grandemente confuse. Ma siami per una volta permesso di usare un poco di te» » merità, la quale mi dovrà tanto più benignamente esser perdonata, quanto io la confesso » » per tale e mi protesto che non intendo di registrar quello, che son per predire, tra le pro-

MARCUM VELSERUM data, de maculis solis, se posse probare GALILAEUM formam annuli cognovisse, vel subtili sagacitate ingenii phaenomenorum formam quae

---

» » posizioni dipendenti da principii certi e da conclusioni sicure, ma solo da alcune mie verisimile » » conjetture, le quali allora farò palesi, quando mi bisogneranno, o per mostrare la scusabile » » probabilità dell' opinione alla quale per ora inclino, o per istabilire la certezza dell' assunta con- » » clusione, qual volta il mio pensiero in contri la verità. Le proposizioni son queste. Le due » » minori stelle Saturnie, le quali di presente stanno celate, forse si scopriranno un poco per due » » mesi, intorno al solstizio estivo dell' anno prossimo futuro 1613, e poi si asconderanno, restan- » » do celate sin verso il brumal solstizio dell' anno 1614, circa il quae tempo potrebbe accadere » » che di nuovo per qualche mese facessero di sè alcune mostra, tornando poi di nuovo ad ascon- » » dersi sin presso all' altra sequente bruma; al qual tempo credo bene con maggior risolutezza, » » che torneranno a comparire, nè più si asconderanno; se non che nell sequente sostizio estivo » » che sarà dell' anno 1615, accenneranno alquanto di volersi occultare, ma non porrò credo » » che si asconderanno interamente; ma ben tornando poco a poco a palesursi, le vedremo » » distintamente e più che mai lucide e grandi; *e quasi risolutamente cordirei di dire che le* » » *vedremo per molti anni senza interrompimento verano.*" " » In questo linguaggio, degno » di gran filosofo, fra il dubbio e la verosimiglianza, fra la circospezione e la temerità, fra » la congettura e la franchezza di una predizione così particolarizzata, e segnatamente nell' ulti- » me espressioni da me sotti-lineate chi non sente che, o GALILEO avera riconosciuto la forma » dell' anello senza osar di accertarsene e meno di pubblicarla, ma tirandone le consequenze delle » occultazioni e riapparizioni periodiche quali debbon accadere, o coll' acuta penetrazion del suo » ingegno avera indovinati la detta forma e i fenomeni che dai moti di Saturno e della terra ne » conseguitano? E noto che parecchie scritture di quel grand' uomo sono andate smarrite; e » quindi, come la teorica e le tavole dei Satelliti di Giove da lui con lungo studio elaborate, » così potrebb' essere fra le carte perdute qualche spiegazion ulteriore circa le apparenze di Sa- » turno. Per tal modo il GALILEO che in contrastabilmente divide coll' UGENIO la gloria dell' » invenzione del pendolo, può seco dividere anche l'altra di aver conosciuto la forma dell' anello » di Saturno e stabilita la teorica de suoi fenomeni. Queste cose amo io di riflettere, poichè » nè LALANDE, nè BAILLY, nè il DELAMBRE, nè gl' illustratori più recenti di GALILEO, come » il VENTURI, hannogli resa giustizia nello scuoprimento dell' anello, ciascun d'essi attribuendone » la gloria solo ed esclusiramente all' UGENIO, e niuno avendo ricordato il passo rimarchevole » che poc' anzi le ho riferito. Per altro il DELAMBRE nell' accordar all' HUYGHENS tutta la lode » e il merito della scoperta dell' anello ha insiem riflettuto che » » *dans le fait, toutes les dé-* » » *couvertes que nous admirons le plus justement ont toujours été plus ou moins préparées* » » *par des recherches et des observations précédentes.*" " (*Histoire de l'Astr. mod.* T. II. p. 565). » Ma la particolar lode in ciò dovata anche al GALILEO e la ragion di attribuir gliela » non erano sfuggite al dottissimo e diligentissimo storico dell' Italiana Letteratura, il Cav. Ab » TIRABOSCHI, scrivendo egli (T. VIII. p. 137. dell' ediz. di Modena in 4°.) » » GALILEO fu » » il primo inoltre a osservar due stelle intorno a Saturno, e vedutele poi dileguarsi, ardi di » » pronosticare il loro ritorno; e vide la sua predizione arverata, e aprì in tal modo la strada » » a conoscere l' ANULO di quel pianeta e a scoprirne le variazioni." "

ex motu Saturni et terrae orirentur divinasse; attamen non ausum fuisse ea pro certo habere, nedum publicare; et deinde opinatur BIANCHI, ulteriores quidem explicationes de Saturni phaenomenis potuisse inveniri in opere ejus deperdito. Licet BIANCHI, ut ipse dicit; ne minimum quidem ab HUGENII meritis in detegendo Saturni annulo detrahere velit, neque in explicandis ejus phasibus; contendit tamen GALILAEO simul cum HUGENIO gloriae partem deberi; quippe qui formam annuli cognoverit et phasium ejus theoriam statuerit. Quis vero non videt, illud nil valere, atque BIANCHI, sicut tot alios, nostrati gloriam sin minus detrahere, tamen diminuere velle.

Cuinam unquam in mentem venerit, cum NEWTONO disputare de laude gravitatis legem invenisse? Attamen HUGENIUS 15 annis antequam NEWTONI *Principia Phil. Nat. Mathem.* in lucem edebantur, communicaverat proprietates vis centrifugae ex motu circulari, in 13 theorematibus (1); et si HUGENIO solum in mentem venisset, duas modo harum thesium inter se conjungere, et, tantum exempli causa ad terrae circa suum axem rotationem et ad lunae circa terram motum adaptare, (quod serius fecit NEWTON, quodque ipsum ad magnam illam detectionem duxit;) tunc profecto detectionis laus HUGENIO competivisset. Nunc autem victoriam omnem eamque indivisam NEWTONO relinquimus; quamvis sibi arrogare multo magis eam posset HUGENIUS, quam HUGENII GALILAEUS.

CAPUT II.

EXPLICATIO PHASIUM ANNULI.

§. 1.

Ex simplici explicatione, quam HUGENIUS de Saturni phaenomenis dedit, patet hunc planetam cinctum esse lucente zona vel tenui et plano annulo, qui planetam nullibi attingit inclinatusque est in ecliptica, quae explicatio omnibus deinceps temporibus confirmata est. Vidimus etiam hunc annulum nonnunquam se

---

(1) HUGENII, *Opera Varia*, pag. 188—192.

ab utraque parte extra planetam extendere, et duas quasi ansas formare videri; quas ansas sensim se conspicimus contrahere, quasi lucidum filum fieri et denique prorsus evanescere. Tunc Saturnus omnino rotundus ostenditur. Post aliquod autem tempus, has ansas rursus apparere videmus seque denuo dilatare, donec maximam latitudinem assecutae iterum decrescere incipiant, ac tandem rursus evanescant.

Haec phaenomena continuo, eodemque ordine eademque ratione, locum habent; unde concludendum est, regularem esse causam, quae has phases producat, et consequenter corpore solido aliquo cingi Saturnum, illudque corpus vicissim e nostris oculis evanescere iterumque apparere.

§. 2.

Hugenii etiam explicatio eo nos ducit, ut cogitemus, quod omnium temporum observationes confirmant, hoc corpus non esse per se lucidum, vicissimque lumen suum amittere rursusque accipere, sed nobis lucem solis reflectere, ejusque mutationes duntaxat tribuendas esse figurae ejus situique, nostri ratione habita. Quum enim Saturnus, motus in plano suae orbitae, hunc annulum secum circumducat, necesse est, ut hic annulus se variis sitibus et variis inclinationibus terrae ostendat omniaque phaenomena, quae in eo observentur, efficiat.

Per se obscura esse corpora et annulum et planetam lucemque a sole accipere, probatur quoque visibili umbra, quam annulus nonnunquam in discum planetae et contra planetam in annulum projicit. Herschelius dicit (1): » The shadow » of the ring upon Saturn is perfectly black, like the shadow of Saturn upon » the ring."

§. 3.

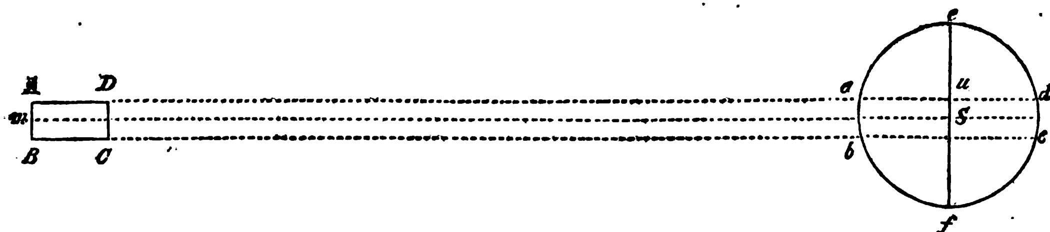
Annulus ergo nobis lucidus apparebit, quando ad nos conversa est alterutra ejus facierum, quae a sole illuminatur.

Tres sunt causae, quae efficiant, quominus annulus in terra videatur:

1°. Quando planum prolongatum annuli per solis centrum transit; tunc enim tantummodo tenuis margo annuli a sole illuminatur, propterque exiguam crassitudinem e nostro visu, in tanta distantia positus, evanescit; tubis multum valentibus, ut Herschelii, eum adhuc ut tenue lucens filum vel lineam videre possemus.

---

(1) *Philosoph. Transact.* 1794. Part. I. pag. 57.



Illud tamen bene animadvertendum est, hoc tantummodo valere quod ad solis centrum; sit enim figura apposita ABCD annulus, *abfcde* sol, ejus centrum in S, dilatetur AD usque ad *ad* atque BC usque ad *bc*; quando autem centrum solis cadit in lineam *m*S, quae annuli planum in duas partes dissecat, superior annuli facies adhuc illuminabitur parte superiore *aed* solis, inferiorque facies adhuc illuminabitur inferiore solis parte *bfc*; at radii solares fere paralleliter transducentur superficiem annuli, et secundum angulum reflectentur, qui similis est angulo incidentiae et hinc etiam valde proclivis ad terram, semper in solis propinquitate versantem. Quum idoneum etiam supponamus situm terrae et utram etiam annuli facierum videamus; (nam non utramque simul conspicere possumus), quaeque illarum nobis nimis parum lucis mittit et sub nimis exiguo annulo, quin tanta distantia possit conspici; atque etiam posset accidere, illum evanescere, antequam sol in planum *m*S venerit.

Possumus computare punctorum *e* et *f* super duas annuli facies elevationem. Si ponimus dimidium solis diametrum e terra visum ut 16′, tunc ille Saturni visus, distantia, quae similis est 9,53877, aut fere aequalis $9\frac{1}{2}$ vicibus distantia terrae ad solem, similis 1′ 41″. Linea ergo S*e* e Saturno visa subtendit angulum 101″, hinc subtrahere debemus S*u* = dimidiam crassitudinem annuli = $\frac{1}{2}e$; ponentes solis elevationem = E, esse igitur negativam debebit, et = 101″ — $\frac{1}{2}e$, ne superior facies annuli nullius lucis radium a sole acceptura sit, sed $\frac{1}{2}e$ est tam tenue, ut fere observari non possit.

2°. Quando planum prolongatum annuli transit solem inter et terram; nam eo facies annuli illuminata a nobis aversa est, et obscura facies ad nos conversa, annulusque ita nobis invisibilis. Hoc tamdiu durat, quamdiu terrae elevatio contrario signo atque elevatio solis affecta sit. Poterimus ergo duntaxat annuli umbram, quae in discum planetae projicitur, conspicere; illa umbra erit semper valde exilis, quia terrae et solis elevationes parum a se invicem differunt; quando annuli planum terram inter et solem transit, hoc planum utrumque proxime transibit, et latitudo umbrae parum superabit annuli crassitudinem.

Tamdiu ergo annulus non conspicietur, quamdiu durat differentia in signis

elevationum; ergo ab eo inde momento, quo terra transierit ad partem plani annuli oppositam, ubi sol adest, usque ad hoc tempus, quo ipse sol eo venerit.

3°. Quando planum annuli prolongatum centrum terrae transit, tunc tantum annuli margo tenuis ad nos conversus est, et ille nobis nimis parum lucis reflectit, quam ut videri possit, aut deberemus iterum uti tubis valde valentibus.

Ita ut annulus solum decimo quinto quoque anno invisibilis fieri possit, propter ejus situm solis ratione habita; illaque apparitio est regularis, quia Saturni motus, quod ad solem attinet, semper directus est. Potest tamen uno eodemque anno invisibilis videri rursusque apparere, propter situm quod ad nostrum oculum, quia Saturnus nonnullis annis, propter ejus motum directum et retrogradum, oculi nostri respectu, 9 vel 10 mensium spatio, plus semel esse potest in plano, quod transit intersectionem ejus annuli cum ecliptica.

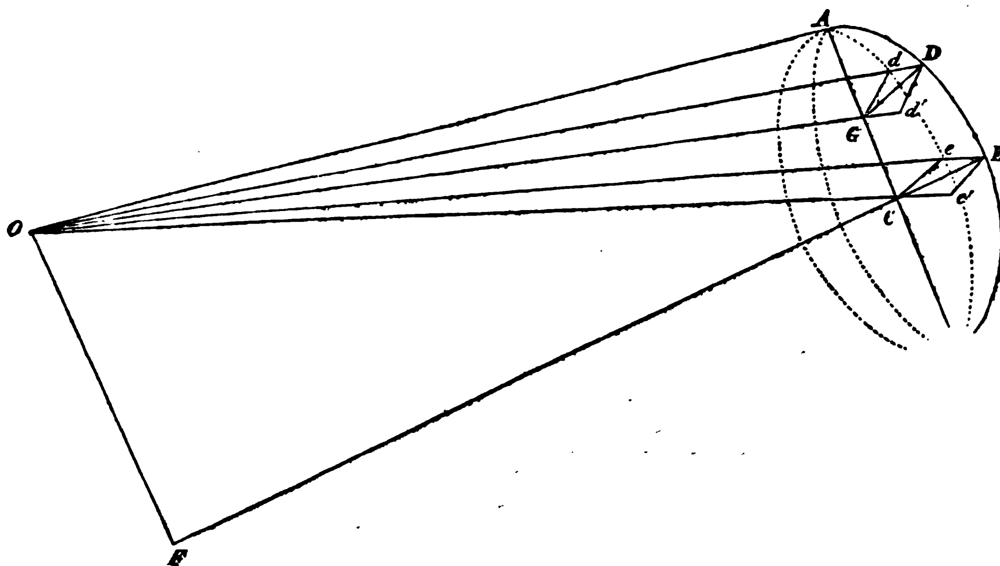
§. 4.

Quando annulus visibilis est, se semper nobis ostendit forma ellipseos, cujus minor axis, vel major vel minor fit, prout oculus plus vel minus supra annuli planum elevatus est: major autem axis semper retinet eandem magnitudinem, a quacunque parte et in quocunque situ nobis et Saturnus appareat. Inde supponere debemus annulum circuliformem esse, sed nobis ellipseos formam ostendere, quia oculus observatoris terrestris se non tollit usque ad 90° supra planum annuli, illeque ergo in situ obliquo observatur, et quando terra it per planum annuli, ellipsis in lineam rectam transit, et, ut diximus, ex oculo nostro evanescit.

§. 5.

Ad probandum, annulum circuliformem esse, et nobis sub ellipseos forma apparere, varias formas, sub quibus cyclus se debeat designare, secundum visionis puncta, e quibus eum observamus, perscrutari geometrice debemus.

Hunc in finem ponamus, in figura apposita oculum observatoris in O positum, quasi in vertice coni radiorum visionis OA, OD, OE, OB, etc. qui circulum AEB ad basin habet, quae descripta est cum radio $CA = CE = CB = r$; linea OC ducta ab observatoris oculo usque ad centrum circuli, coni axin format, qui oblique in ejus basi AEB positus est. Quando jam transmittimus planum per AB, quae perpendiculariter erigitur in axi OC, tunc illud planum occurret radiis visionis OD et OE in d et e, igiturque conum secabit, secundum rationem ellipseos $AdeB$, cujus situs et compressio per se pendent ab observatoris situ.



Est autem haec ellipsis, sub qua forma circuitus apparens annuli circuliformis se nobis ostendit. Propter magnam distantiam Saturni ad terram, nobis videmur omnes annuli partes eadem distantia unoque plano conspicere, quod perpendiculariter erigitur in linea, ex nostro oculo ad annuli centrum ducta; aeque ac locum habet respectu solis et lunae, quae haberemus discos rotundos planosque, nisi nobis persuasum esset de ejus forma sphaerica. Haec est etiam causa, quare illam annuli partem, quae ante planetae discum reperitur, non ab ipso planeta discernere possimus, tantummodoque duas partes ulteriores, quae ab utraque parte planetae eminent, clare possimus observare, quaeque formae causa, sub qua nobis nonnunquam apparent, ansae nominantur.

Cadat porro in figura apposita ex O in planum prolongatum circuli linea perpendicula OF, ducamusque deinceps lineam FC, quae circuli circumferentia in E occurret, et diametrum AB secet sub angulo recto. Tunc OCF = ECé = E = inclinationi radii visionis OC in area circuli AEB, aut elevatio oculi supra hoc planum, et quum linea AB perpendiculariter posita est in linea communi intersectionis EC, planorum EOF et EAB, quae quoque perpendiculariter inter se invicem erectae sunt, igiturque etiam perpendiculariter erecta est in plano EOF, sequiturque OCA et OCB esse angulos rectos.

§. 6.

Biot merito hic observat (1), nos primo loco concludere, ellipseos centrum

(1) Biot, *Traité élémentaire d'Astronomie Physique*, Tom. III. Chap. VII. pag. 83.

esse in axi coni, ejusque axem majorem, qui paralleliter cum ejus circuliformi basi currit, aequalem esse debere hujus basis diametro, quod non valde accuratus est. Centrum ellipseos currit paululum infra planum basis coni, ejusque major axis est etiam major hujus basis diametro, quod eo accidit, quia dimidium basis, quod ad observatorem conversum est, majus esse videtur, quam alterum dimidium. Illud autem discrimen diminuitur ratione distantiae observatoris, fitque prorsus insensibilis, quando distantia permagna est, quod ad diametrum basis; ut in hoc casu, ubi distantia Saturni ad terram permagna est respectu diametri annuli. Ita ut tuto statuere possimus, centrum ellipseos cum centro basis coïncidere, ejus axem majorem aequalem esse diametro basis, perpendiculariterque in axi coni erectum esse.

§. 7.

Coördinata circuli ADEB in Figura ultima sunt CG $= x$, GD $= y$; et de circulo projecto $AdeB$ ponatur CG $= x'$, Gd $= y'$. Nanciscimur ergo quod ad circuli aequationem $x^2 + y^2 = r^2$. Qui ergo CE et DE, et propter magnam distantiam OC, OE et OD sint paralleli, itaque est ODG $=$ OEC $=$ ECe' $=$ E. Tunc triangulus rectangulus DGd praebet

$$y = \frac{y'}{sin.\ \mathrm{E}},$$

hanc aequationem loco illius circuli substituentes, acquirimus:

$$y'^2 = (r^2 - x^2)\ sin.^2\ \mathrm{E};$$

quae est aequatio circuli projecti A$d$$e$B. Et sicut e mathesi sublimiore scimus, aequationem ellipseos, cujus centrum in C, axis major $= 2r =$ AB, et axis minor $= 2r\ sin.\ \mathrm{E} = 2\mathrm{C}e$ est.

§. 8.

Unde ergo cognita illa lex optica sequitur, circulum magna distantia sub quodam angulo visum, se ostendere visui forma ellipseos, cujus major axis se habet ad minorem axem, ut radius circuli ad sinum anguli E, quem linea oculi ad centrum circuli ducta facit cum area circuli: porro axem minorem Ce jacere in intersectione plani perpendicularis in circulo OCF, cum plano perpendiculari per C in OC. Qui ambo axes continentur angulis COA et COE, et requirimus

$$tang.\ \mathrm{COA} = \frac{r}{\mathrm{OC}},$$

$$tang.\ \mathrm{COE} = \frac{\mathrm{C}e}{\mathrm{OC}} = \frac{r\ sin.\ \mathrm{E}}{\mathrm{OC}};$$

ita ut parvi anguli vel axes, quorum mensura ostendunt, ad se invicem se habeant, ut 1 ad *sin.* E; ut supra vidimus.

Ex hisce resultatis apparet, si accurate, momento aliquo dato, relationem duorum ellipseos axium novimus, eodem etiam momento habiturum esse axem in basis plano.

§. 9.

Si E est quantitas positiva, scilicet borealis, tunc pars anterior annuli aut illa quae proxime ad nos conversa est, nobis erit infra Saturni centrum, maxime remota pars erit supra centrum, sed partim planetae corpore tecta.

Si E est quantitas negativa, aut si terra conspicit faciem meridionalem annuli, tunc erit anterior, sive illa, quae proxime ad nos conversa est, annuli pars nobis supra centrum Saturni, pars maxime remota erit infra partimque pone planetam abscondita.

Annuli partes ad orientem et occidentem planetae sitae, aut ejus ita dictae ansae, per axem majorem dividuntur in duas partes aequales, qui axis major exinde quoque nonnunquam *ansarum linea* vocatur. Quae ansae per se cum elevatione E formâ mutantur.

CAPUT III.

DE INCLINATIONE ANNULI NODORUMQUE EJUS SITU.

§. 1.

Durante cursu, quem terra uno anno circum solem perficit, prolongatum terrestris aequatoris planum per solis centrum transire nequit, quam quum in eo suae orbitae puncto adsit, in quo aequatoris intersectione cum illa orbita, hoc est, cum ecliptica locum habet. Quum ergo Saturni annulus, aut proprie ejus planum prolongatum eodem modo in orbitam Saturni inclinet, qui ejus specialis ecliptica est, velut noster aequator in nostra est ecliptica, itaque prolongatum annuli planum non per centrum solis ire potest, nisi quum Saturnus per suam revolutionem circa solem annis 29 et diebus 166,71984 in duobus sit

hujus orbitae oppositis punctis, ubi intersectio ejus annuli cum ejus orbita locum habeat.

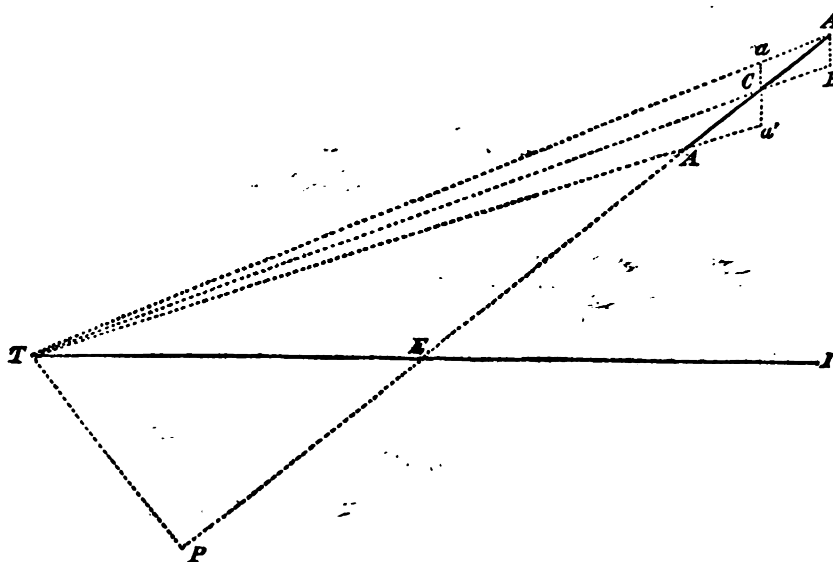
Illi sunt nodorum annuli in Saturni orbita situs, in quibus annulus, quando Saturnus per eos transit, invisibilis fit, quia ejus planum prolongatum per solis centrum transit.

Ut autem annulus suos habet nodos in orbita Saturni, sic etiam in nostra ecliptica habet.

§. 2.

Quum igitur demetimur amborum axium ellipseos annuli relationem, tempore, quo terra sit distantia 90° ab annuli nodis, immediate exinde annuli inclinationem deducere possumus.

Etenim quum terra sit distantia 90° ab annuli nodis, tunc planum, quod per terram et Saturnum perpendiculariter per eclipticam transit, etiam eodem tempore est perpendiculariter in planum annuli in eclipticam inclinationem per lineam rectam, secundum quam secantur haec plana.



In figura apposita AA'E' sit haec recta linea, TI linea intersectionis plani secantis, quod transit per terram et Saturnum cum ecliptica; T terra, C centrum Saturni et AA' vera dimensio annuli. Observatio designat angulos visus ATC et A'TC, qui magnae Saturni distantiae causa, fere sibi invicem sunt similes, et quisque eorum semiaxem minorem ellipseos definit. Exinde sequitur (1).

---

(1) *Propter magnam distantiam et exiguam inclinationem Saturni orbitae ad eclipticam, assumere possumus, sine sensibili discrimine efficiente,* Ca *perpendiculariter in visus lineâ* TA *erectum esse.*

$$sin.\ CAT = sin.\ CAa = \frac{Ca}{CA} = \frac{b}{a}$$

et quum

CAT + CTE + CTA = CAT + ATE = 180° — AET = IEA = inclinatio plani annuli in eclipticam sit. Itaque est inclinatio, ponentes eam similem I:

$$I = CAT + CTE + CTA.$$

id est, angulo CAT, quem accipimus, quando terra est distantia 90° ab annuli nodis, debemus adhuc addere latitudinem Saturni geocentricam et semiaxem minorem ellipseos, ut habeamus inclinationem annuli in eclipticam. Huc requiruntur observationes, quae in ipso momento fiunt, quando terra est 90° distantia ab annuli nodis; illudque locum habet, quum annuli apertura quam maxima sit; illa enim apertura aut latitudo ellipseos est proportionalis inclinationi axis coni in annuli plano.

Hoc efficiendo, dicit Biot, inclinationem annuli in eclipticam inventum esse = 31° 20′ (1); non tamen verosimile est, Biot eam computasse, tunc enim ad alium exitum venisset.

§ 3.

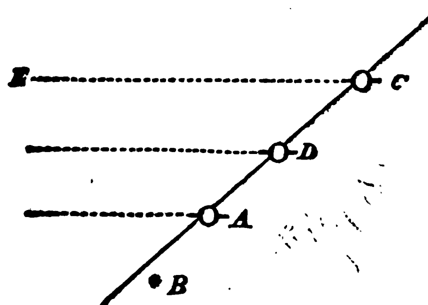
In principio, quum adhuc annulus ille haberetur pro duobus comitibus, invisibili aliqua linea conjunctis; nonnulli putabant astronomi, illam lineam paralleliter cum ecliptica procedere. Attamen Galilaeus (2), »qui (ut Hugenius ait) »primus phaenomeni hujus indicium fecit, non omnino eclipticae parallelam »lineam, in qua Saturni comites positi essent, sibi visum scribit, sed evidenter »ab ea deflectere; et fortasse, inquit, aequatori parallela est.” Deinceps universe assumebatur, aequatori illam lineam esse parallelam; ambos in una linea sitos esse comites, quae aequatori parallela sit, exinde patet, inquit Ricciolus (3), »quia linea per ipsorum centra ducta parallela erat lineae ductae »a lucida Arietis ad oculum australem Tauri, quod saepius observatum est a »nobis;” et pergit, »anno 1647 die 3 et 4 Februarii, quo tempore, eodem ob»servante, linea comitum parallela apparuit lineae ductae a lucida Arietis ad »Pleiades, adeoque parallela aequatori potius quam eclipticae.” Annis 1648 et 1649, quum comites in ellipsin quandam conformari videantur, inquit: »linea »verò ducta per majorem diametrum hujus ellipseos parallela erat lineae ductae

(1) Biot, *Traité élémentaire d'Astronomie Physique*, Tom. III. Chap. VII. pag. 85—89.
(2) Hugenii, *Opera Varia*. pag. 569.
(3) Riccioli, *Almagestum novum*, Lib. VII. pag. 487.

» per Pleiadas et per centrum ipsius Saturni in gradu ♊ 32 positi, cum latitudi» ne austr. gr. 1° 32′, ut idem P. GRIMALDUS adnotavit: sic anno 1647 Octobr. 15 » linea per extremo comitu protracta, transibat per cornu australe Tauri et per » Pleiadum australissimam; ex quibus confirmatus fuit comitum horum parallelis» mus ad aequatorem. Talem BLANCANUS in *Sph.* lib. 15. cap. 7. visum a se » anno 1616 Octobri et 1619 Novembri testatur."

Hisce sententiis non consentit HEVELIUS (1), concedit quidem lineam, quae Saturni centrum extremitatesque amborum brachiorum transit, inde ab anno 1647 usque ad 1652 nullam aliam posse habere directionem, quam illam, ut parallela aequatori esset; nonnullas autem observationes, velut illas annorum 1643, 1644 et 1645 omnino contrarium docere; postremis nempe annis ansarum directionem fere eclipticae parallelam esse, atque in universum (2) hanc lineam, modo aequatori, modo eclipticae, sed in plurimis casibus neutri horum planorum parallelam esse atque ita constantem non habere directionem. Opinatur deinceps ostendere se posse, pendere hanc directionem a signis Zodiaci in quibus Saturnus adest, ut, quum Saturnus fere in Geminis et Cancro, in Sagittario et Capricorno sit, lineam, brachium conjungentem, aequatori parallelam esse, in Tauro autem et Leone, in Scorpioneque et Aquario hanc lineam medium cadere aequatorem inter et eclipticam; atque in Piscibus et Ariete, in Virgine et Libra parallelam eclipticae. Hanc autem directionem plerumque aequatori parallelam observari, huic rei tribuendum est', inquit (3) idem, quia ille est maxime idoneus situs, in quo observari queat, dum, quando eclipticae parallela sit directio observanda, sine ansis appareat planeta atque tunc directio non possit observari.

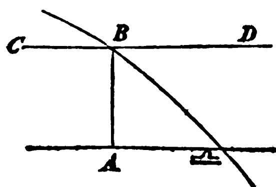
HUGENIO autem nostro iterum servatum erat ad accuratiores pervenire eventus. Ejus igitur observationum historiam breviter commemorabimus. Reperiebat (4) Saturnum, die 25 Martii anno 1655, quod ad stellam fixam B, in A adesse (videatur Figura apposita), die sequenti in D et tertio die in C, dum stella erat in B; unde concludebat ansarum lineam sive magnum annuli diametrum (qui semper sibi paralleliter movetur) quotidie se altius supra stellam fixam B adscendere, ac nequaquam planetae viam ansarum directioni congruere, sed cum ea angulum



(1) *Dissertatio de Nativa Saturni facie*, pag. 23.
(2) *Ibidem*, pag. 24. (3) *Ibidem*, pag. 26.
(4) Vid. HUGENII, *Opera Varia*, pag. 567.

ACE facere, quem inveniebat esse 20°. Quumque eodem tempore, Saturni apparens latitudo fere non esset mutata, exinde sequi debebat, AC parallelum eclipticae esse; et hinc etiam ansarum lineam sub angulo 20° ad eclipticam inclinare. Eundem eventum nanciscebatur etiam die 9 Aprilis sequentibusque tribus diebus, porro quoque inde ab 27 usque ad 31 Maji.

Brachiorum Saturni ad eclipticam inclinationem, inquit HUGENIUS (1) deinde, non in dubium vocari potest, licet confiteri debeamus, eam non ea diligentia, quae requirebatur, definitam esse (2). Attamen, ita pergit, si inclinationem illam ponimus 21°, quam observationes omnino confirmant, brachia aequatori parallela procederent. Quum enim Saturnus eo tempore 3° in Virgine erat, ubi aequatoris parallelus eclipticam secaret, sub angulo 21°, sub quo angulo etiam brachiorum linea eclipticam secabat; hinc sequi necesse est, etiam brachiorum lineam aequatori parallelam procedere.



Fortasse sequenti modo HUGENIUS computationem iniit: Sit in figura apposita A♎ aequatoris pars, B♎ pars eclipticae atque CD parallele aequatori; tunc, quum Saturnus se 3° in Virgine esset; B♎ = 27° atque obliquitatem eclipticae A♎B = 23° 30′ assumentes, habemus in triangulo rectangulo A♎B:

$$tang.\ AB\text{♎} = \frac{cotg.\ A\text{♎}B}{cos.\ B\text{♎}}$$

nobisque est

$$Log.\ cotg.\ A\text{♎}B = Log.\ cotg.\ 23°\,30' = 0.3616981$$
$$Log.\ cos.\ B\text{♎} = Log.\ cos.\ 27° = 9.9498809$$
$$Log.\ tang.\ AB\text{♎} = 0.4118172$$
$$AB\text{♎} = 68°\,49'\,21'',2$$

ergo quod ad angulum, qui parallelum CD cum ecliptica efficit

21° 10′ 38″,8.

Annuli planum parallelum aequatori procedere, ei adhuc confirmabant anni proxime sequentis observationes.

Alii astronomorum principes, ut, GASSENDUS, BULLIALDUS et RICCIOLUS ipsi

---

(1) *Ibidem*, pag. 568.

(2) *Hic observandum est*, HUGENIUM *omnino non munitum fuisse, instrumentis astronomicis, quae hoc nomen eo tempore vel tantillum quidem gerere merebantur; quod saepe queritur praesertim in suis ad plures Europae doctos literis.*

consentiebant, non autem conveniebant HEVELII observationes, quae, ut ait, docere videbantur, ansarum lineam, fere eclipticae parallelam esse. Deinde dicit, HUGENIUS (1): »Esse autem annuli planum plano aequatoris omnimodis pa» rallelum, etsi observationibus, quas quidem expendimus hactenus, minime re» pugnantibus statuere licuit; exiguum tamen quid deësse, quo minus omnino » perfectus sit eorum parallelismus, alia ratione deprehenditur. Etenim si pror» sus inter se parallela forent utraque plana, sequeretur ut cum in pr. ♈ et ♎ » Saturnus spectaretur, omnium arctissima annuli ellipsis, et quasi recta linea » existeret, latissima vero in pr. ♋ et ♑. Atqui arctissimum annuli phasium in » gr. 20½ ♍ et ♓ cadere invenimus, ut in sequentibus demonstrabitur, ac proin» de latissimam in gr. 20½ ♊ et ♐. Non igitur exacte parallela esse plana annuli » et aequatoris hinc patuit, ideoque nec semper revera parallelam, licet ita vi» deatur, magnam Saturni diametrum aequatori circuli fore. Quaesitoque per » sphaerica triangula, quibus in locis et quanta sit maxima inclinatio, inveni eam » gr. 4,8′. Quando Saturnus in gr. 25,15′. ♊ et ♐ versatur. Tali nimirum an» gulo, nec unquam majori, ansarum linea circulum aequatori parallelum per » Saturnum transeuntem iis in locis intersecabit; qui cum sit adeo exiguus, vix » puto observabilis erit: aliis autem locis multo minus. Nam iisdem quidem quae » quadrante Zodiaci inde absunt, nempe cum gr. 25.15′ ♍ aut ♓ Saturnus obti» nebit, prorsus parallela aequatori eadem ansarum linea conspicietur. Eclipticae » vero parallela fiet Saturno gr. 20½ ♊ aut ♐ tenente: quippe quam in locis per » quadrantem circuli inde distantibus, nempe in gr. 20½ ♍ et ♓, maximo angulo » intersecat. Hunc autem maximum angulum quo linea ansarum eclipticam inter» secat, esse circiter gr. 23½ observationibus anni 1655, 1656 et 1657 apparuit, » talemque ad ista supputanda adsumsimus. Fortasse autem, longo saeculorum » lapsu, sensim omnia haec loca mutari continget, simili quodam motu Saturni » globum inclinante atque in Tellure nostra est is, qui praecessiones aequinoctio» rum efficit: atque ita phasium quoque omnium loca transferri necesse erit. Hoc » verò non tam facile in caeteris phasibus quam in rotunda patescet, ad cujus » considerationem deinceps veniendum."

Die 24 Septembris 1658 HUGENIUS JOANNI HODIERNAE scribit (2), in eo etiam HEVELIUM falli, statuendo ansarum directionem potius eclipticae quam quidem

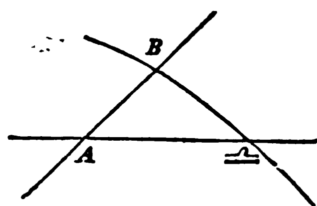
---

(1) HUGENII, *Opera Varia*, pag. 574.
(2) *Epistolae* CHR. HUGENII, *Manuscr.* N°. 19. K. 3. pag. 227. *In Bibliotheca Acad. Lugduno-Batavae.*

aequatori parallelem procedere; seque HODIERNAE RICCIOLOque consentire eam aequatori parallelam esse.

Annis autem decem post, anno nempe 1668 die 17 Augusti, tempore vespertino hora 11 vel 11½; HUGENIUS PICARDUSque in Bibliotheca Regia Parisiis simul Saturnum planetam, ope tubi 21 pedum observabant (1). Variis modis magnae diametri annuli ad aequatorem inclinatio metiebantur (2), qui inveniebatur circiter esse 9°, quamquam eo tempore deberet esse 4°, secundum illud, quod HUGENIUS antea in suo *systemate Saturni* dixerat, quia annuli ad eclipticam inclinationem 23° 30′ esse, definiverat; sed (ut commentator ait) illa ultima observatio aliaeque ejus modi hujus et praecedentis anni magis sunt accuratae factaeque illo tempore, quod magis aptum erat ad demetiendam obliquitatem, quam illud, quod fundamentum praecedentis definitionis efficiebat. Loco 23° 30′ annuli plani cum ecliptica angulum HUGENIUS reperiebat esse fere 31°; quae definitio tunc quoque omnino conveniebat cum Saturni forma et observationibus, quae ab eo inde tempore factae sunt.

HUGENIUS forte hanc obcrvationem sequenti modo computavit: sit figura apposita, A ♎ aequator, ♎ B ecliptica et AB magnae annuli diametri directio, quumque puncti B longitudo in ecliptica 167° erat, itaque B ♎ = 13°; obliquitatem eclipticae statuebat = 23° 30′, angulumque BA ♎ reperiebat fere 9° esse; triangulus AB ♎ praebet tunc:



$$cotg.\ \psi = cos.\ B♎\ tang.\ A♎B.$$

$$sin.\ (AB♎ - \psi) = \frac{cos.\ BA♎\ sin.\ \psi}{cos.\ A♎B}.$$

$$Log.\ cos.\ B♎ = Log.\ cos.\ 13° = 9.9887239$$
$$Log.\ tang.\ A♎B = Log.\ tang.\ 23°30' = 9.6383019$$
$$Log.\ cotg.\ \psi = 9.6270258$$
$$\psi = 67° 2' 21''$$

---

(1) Vid. HUGENII, *Opera varia*, pag. 637. *et Anciens Mémoires de l'Academie Roy. des Sciences*, Tom. X. pag. 338.

(2) *Probabiliter* HUGENIUS *diametri magnae annuli directio cum stellis fixis comparaverit.*

Log. cos. BA♎ = *Log. cos.* 9° = 9.9946199
Log. sin. ψ = *Log. sin.* 67° 2′ 21″ = 9.9641520

9.9587719
Log. cos. A♎B = *Log. cos.* 23° 30′ = 9.9623978

Log. sin. (AB♎ — ψ) = 9.9963741
AB♎ — ψ = 82° 36′ 23″,3
ψ = 67 2 21, 0

AB♎ = 149° 38′ 44″,3

Itaque angulus ♎BC, qui magnae diametri annuli directio cum ecliptica efficit = 30° 21′ 15″,7.

Quando autem hanc Hugenii observationem accommodamus ad formulas, quae deinceps sequentur, Bessel (1) reperiebat multo accuratiorem valorem 29° 29′ 28″. Unde patet Hugenium valde accurate observasse.

Secundum Campani observationes mense Julio 1664 factas, annuli axis major bis esset tantus, quam axis minor, quod fere etiam prodebat 31° 20′ (2).

Huic rei tribuendum est, quod annuli inclinationem ad eclipticam, per plures quam 100 annos assumserunt, esse 31° 20′, ut in omnibus compendiis astronomicis, serioris quoque temporis invenimus (3); quod, ut Bessel animadvertit, in suppositione Maraldi, magis quam veris observationibus fundatum esse videtur. Quum Maraldi non dicat, quomodo hanc inclinationem acceperit, eamque solummodo supponat esse 31° 20′; porro etiam annuli ad Saturni orbitam inclinationem 30° esse (4). Hac quoque auctoritate La Lande inclinationem assumit, atque ad eam confirmandam adducit inclinationem ab Heinsio repertam 30° 23′ 17″ (5), quae proprie nulla alia est, nisi accuratioris computationis eventus Maraldianae suppositionis.

Secundum Hugenium longitudo nodi annuli in orbita Saturni, sub medium seculum decimum septimum, erat = 170° 30′ et in ecliptica = 167°. Observationibus 1685 factis, videbatur nodus annuli in orbita Saturni esse 169° 55′.

---

(1) *Königsberger Archiv für Naturwissenschaft und Mathematik*, 2tes Stück. pag. 128.
(2) Hugenii, *Opera Varia*, pag. 637.
(3) Littrow *tamen hic excipi debet, quippe qui ponit* 28° 40′. Confer. *Theoretische und practische Astronomie*, Th. II. pag. 243.
(4) *Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences de l'an* 1716. pag. 178 et 180.
(5) La Lande, *Astronomie*, Ed. III. Tom. III. pag. 343 et 345.

Cassini in *Élémens d'Astronomie* eum ponit in 172°; Maraldi in 169°48′ observationibus factis 1715 (*Mem. de l'Academie* 1718), quae ultima determinatio minus leni spirante aura effecta est. La Lande eum reperiebat in annum 1774 in 170° 38′ et in ecliptica 167° 5′. Schröter calculabat ex observatis apparitionibus et disparitionibus annuli a Flaugergues institutis annis 1802 et 1803 (1) longitudinem annuli nodorum in ecliptica = 167° 15′ 15″. Ex Schröteri et Hardingi observationibus (2) Besselus longitudinem nodorum reperiebat

= 167° 18′ 14″,4
et = 167° 20′ 1″,1
hujus medium = 167° 19′ 7″,8.

§. 4.

Quando annuli planum per solem transit, Saturnus est in linea intersectionis plani annuli et ejus orbita, et nodi longitudo annuli est tunc aequalis longitudini heliocentricae Saturni in sua orbita, ita ut situs nodorum in orbita Saturni statim tali inveniatur observatione; quando nempe annulus evanescit, quia ejus planum per centrum solis transit Haec methodus non est accurata, quia annulus per vulgares tubos opticos observatus evanescit, antequam ejus planum per solis centrum transeat; quia autem annulus eandem ob causam, in puncto opposito tanto serius iterum apparet, medium inter utramque observationem 90° hujus nodorum linea situm est, quo nansciscimur nodorum longitudinem. Sit in figura apposita, ♈E Ecliptica, ML orbita Saturni, NL annuli planum; tunc observationibus invenimus longitudinem nodi L vel arcus KL, quae est longitudo nodi in orbita Saturni. Ex illa Saturni orbita cognoscimus a priori ♈M = KM = longitudinem nodi orbitae Saturni in ecliptica; supponentes angulum ENL = inclinationi annuli in eclipticam cognitam esse. Habemus ergo in triangulo LMR, angulos M, N et latus ML = KL — ♈M cognitos, unde invenimus MN atque etiam longitudinem nodi annuli N in ecliptica = ♈M.

Talibus observationibus computandis reperta est, secundum Schubertum (3),

(1) *Kron. Fragmente*, pag. 143 et 208.
(2) *Ibidem*, pag. 209 et 210.
(3) Schubert, *Traité d'Astronomie Theorique*, Tom. II. pag. 248.

longitudo adscendentis nodi in ecliptica in annum 1774, = 167° 40′. La Lande idem tempus nactus est 167° 5′ (1).

§. 5.

Antequam ulterius procedamus, methodum quam tradit Biot, exemplo applicabimus (2). Secundum Besseli observationes, habebant anno 1811, maximae aperturae annuli tempore, 22 Maji (3),

pro diametro magna $= b =$ 17″,67

pro diametro parva $= a =$ 38,2694

quum esset latitudo geocentrica Saturni $= \lambda =$ 1° 21′ B.

ergo nobis est

$$\textit{sin.}\ \mathrm{CAT} = \frac{17{,}67}{38{,}2694}$$

$$\begin{aligned} \textit{Log.}\ 17{,}67 &= 1.2472365 \\ \textit{Log.}\ 38{,}2694 &= 1.5828517 \\ \hline \textit{Log. sin.}\ \mathrm{CAT} &= 9.6643848 \\ \mathrm{CAT} &= 27^\circ\, 29'\, 54'',8 \\ \text{Latitudo geocentrica} = \mathrm{CTE} &= 1\ \ 21 \\ \text{Semidiametrus parva} = \mathrm{CTA} &= \qquad\quad 8,8 \\ \hline \mathrm{I} &= 28^\circ\, 51'\ \ 3'',6 \end{aligned}$$

Attamen, quia difficillimum est ipsum maximae annuli aperturae momentum intercipere, et quia Saturui latitudo adhuc modificationem infert, ut La Lande animadvertit (4), transibimus ad illud, ut ex observatis disparitionibus et reapparitionibus id determinare conemur.

§. 6.

Hunc in finem sumimus punctorum in spatio situm, ratione habita trium rectangulorum coördinatarum axium x, y, z; unde origo sit in terrae centro. Deinceps sumimus axem z perpendiculariter in ecliptica et supponimus axem x ad punctum aequinoctiale veris directum. Quando nunc planum annuli per terrae

---

(1) La Lande, *Astronomie*, Tom. III. pag. 340.

(2) Vid. §. 3.

(3) *Königsberger Archiv für Naturwissenschaft und Mathematik*, 2tes Stück, pag. 126.

(4) La Lande, *Astronomie*, Tom. III. Liv. XX. pag. 346.

centrum iturum est, hujus plani aequatio habebit hanc formam

$$z = Ax + By,$$

quantitates invariabiles pendent a directione intersectionis in ecliptica et ab ejus inclinatione ad eam. Sit I haec inclinatio, designemus per N longitudinem adscendentis nodi annuli in ecliptica, tunc habemus

$$tang.\, N = -\frac{A}{B}, \quad tang.\, I = \sqrt{(A^2 + B^2)},$$

unde sequitur

$$A = -\, tang.\, I\; sin.\, N, \quad B = tang.\, I\; cos.\, N;$$

quo plani aequatio hanc formam accepit

$$z = y\; tang.\, I\; cos.\, N - x\; tang.\, I\; sin.\, N.$$

Haec est ergo plani aequatio, quod per terrae centrum paralleliter annuli plano currit. In ipso momento, quo planum annuli per centrum terrae transit, Saturnus est in plano, ejusque coördinatae geocentricae debebunt praecedenti relationi satisfacere.

Ejus coördinatae per x', y', z' proponentes, habebimus

$$z' = y'\; tang.\, I\; cos.\, N - x'\; tang.\, I\; sin.\, N.$$

Sit l longitudo geocentrica, λ latitudo geocentrica Saturni, et r distantia ejus centri ad terrae centrum. Habemus tunc

$$x' = r\; cos.\, \lambda\; cos.\, l, \quad y' = r\; cos.\, \lambda\; sin.\, l, \quad z' = r\; sin.\, \lambda;$$

valores in aequatione praecedente substituentes, nanciscimur tempore, quo planum annuli per centrum terrae transit

$$r\; sin.\, \lambda = r\; cos.\, \lambda\; sin.\, l\; tang.\, I\; cos.\, N - r\; cos.\, \lambda\; cos.\, l\; tang.\, I\; sin.\, N$$

unde sequitur

$$\begin{aligned} tang.\, \lambda &= tang.\, I\; sin.\, l\; cos.\, N - tang.\, I\; cos.\, l\; sin.\, N \\ &= tang.\, I\; sin.\, (l - N) \end{aligned}$$

atque ita

$$sin.\, (l - N) = \frac{tang.\, \lambda}{tang.\, I}$$

in hac formula sunt l et λ longitudo et latitudo geocentrica Saturni quantitates cognitae.

§. 7.

Quando nunc observationes duorum mox sibi succedentium transituum annuli plani per terrae centrum habemus, ponentesque longitudinem latitudinemque geocentricam in secundam observationem l' et λ', acquirimus quod ad hanc observationem

$$sin.\ (l' - N) = \frac{tang.\ \lambda'}{tang.\ I}$$

hanc aequationem cum ea praecedentis paragraphi connectentes, habemus

$$sin.\ (l - N) : sin.\ (l' - N) = \frac{tang.\ \lambda}{tang.\ I} : \frac{tang.\ \lambda'}{tang.\ I},$$

$$sin.\ (l - N) : sin.\ (l' - N) = tang.\ \lambda : tang.\ \lambda',$$

$$sin.(l - N) + sin.(l' - N) : sin.(l - N) - sin\ (l' - N) = tang.\ \lambda + tang.\lambda' : tang.\ \lambda - tang.\ \lambda',$$

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(l - N + l' - N) : tang.\ \tfrac{1}{2}(l - N - l' + N) = sin.\ (\lambda + \lambda') : sin.\ (\lambda - \lambda'),$$

$$tang.\ \frac{(l + l'}{2} - N) : tang.\ \tfrac{1}{2}(l - l') = sin.\ (\lambda + \lambda') : sin.\ (\lambda - \lambda')$$

$$tang.\ (\frac{l + l'}{2} - N) = \frac{tang.\ \tfrac{1}{2}(l - l')\ sin.\ (\lambda + \lambda')}{sin.\ (\lambda - \lambda')} \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

eaedem formulae praebent etiam

$$tang.\ I = \frac{tang.\ \lambda}{sin.\ (l - N)} = \frac{tang\ \lambda'}{sin.\ (l' - N)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Itaque duabus brevi sibi invicem succedentibus observationibus quod attinet ad transitum plani annuli per centrum terrae, possumus determinare nodorum longitudinem et inclinationem annuli in eclipticam.

§. 8.

Quando originem coördinatarum in centro solis ponimus, nanciscimur eodem modo L et Λ longitudinem et latitudinem heliocentricam Saturni designantes

$$sin.\ (L - N) = \frac{tang.\ \Lambda}{tang.\ I}$$

quando annuli planum per solis centrum transit.

Quum annuli planum bis in quaque revolutione Saturni siderali circum solem, transeat per centrum solis, et illae duae observationes fere 15 annos a se invicem dissitae sunt, debemus etiam in hac succedente observatione spectare aequinoctiorum praecessionem. Longitudinem latitudinemque heliocentricam Saturni in sequenti observatione ponentes per L′ et Λ′ et praecessionem aequinoctiorum eo temporis intervallo per ω, habemus

$$sin.\ (L' - N - \omega) = \frac{tang.\ \Lambda'}{tang.\ I}$$

utraque ultima aequatio praebet

$$sin.\,(L - N) : sin.\,(L' - N - \omega) = \frac{tang.\,\Lambda}{tang.\,I} : \frac{tang.\,\Lambda'}{tang.\,I},$$

$$sin.\,(L - N) : sin.\,(L' - N - \omega) = tang.\,\Lambda : tang.\,\Lambda',$$

$$sin.(L-N)+sin.(L'-N-\omega) : sin.(L-N)-sin\,(L'-N-\omega) = tang\,\Lambda + tang.\Lambda' : tang.\Lambda - tang.\Lambda'$$

$$tang.\tfrac{1}{2}(L-N+L'-N-\omega) : tang.\tfrac{1}{2}(L-N-L'+N+\omega) = sin.\,(\Lambda+\Lambda') : sin.\,(\Lambda-\Lambda')$$

$$tang.\,(\frac{L+L'-\omega}{2} - N) : tang.\tfrac{1}{2}(L-L'+\omega) = sin.\,(\Lambda+\Lambda') : sin.\,(\Lambda-\Lambda'),$$

$$tang.\,(\frac{L+L'-\omega}{2} - N) = \frac{tang.\,\tfrac{1}{2}\,(L-L'+\omega)\,sin.\,(\Lambda+\Lambda')}{sin.\,(\Lambda-\Lambda')} \quad . \; . \quad \text{(III)}$$

nobis quoque est

$$tang.\,I = \frac{tang.\,\Lambda}{sin.\,(L-N)} = \frac{tang.\,\Lambda'}{sin.\,(L'-N-\omega)} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(IV)}$$

§. 9.

Eodem modo quando jungimus cum heliocentrica aequatione geocentricam, hic est, quando aequationes

$$sin.\,(l - N) = \frac{tang.\,\lambda}{tang.\,I}$$

$$sin.\,(L - N) = \frac{tang.\,\Lambda}{tang.\,I}$$

inter se comparamus, habemus

$$sin.\,(l-N) : sin.\,(L-N) = tang.\,\lambda : tang.\,\Lambda$$

$$sin.\,(l-N) + sin.(L-N) : sin.\,(l-N) - sin.\,(L-N) = tang.\lambda + tang.\,\Lambda : tang.\,\lambda - tang.\Lambda$$

$$tang.\tfrac{1}{2}(l-N+L-N) : tang.\tfrac{1}{2}(l-N-L+N) = sin.\,(\lambda+\Lambda) : sin.\,(\lambda-\Lambda)$$

$$tang.\tfrac{1}{2}(l-N+L-N) : tang.\tfrac{1}{2}(l-N-L+N) = sin.\,(\lambda+\Lambda) : sin.\,(\lambda-\Lambda)$$

$$tang.\,(\frac{l+L}{2} - N) : tang.\tfrac{1}{2}(l-L) = sin.\,(\lambda+\Lambda) : sin.\,(\lambda-\Lambda)$$

$$tang.\,(\frac{l+L}{2} - N) = \frac{sin.\,(\lambda+\Lambda)}{sin.\,(\lambda-\Lambda)}\,tang.\tfrac{1}{2}(l-L) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(V)}$$

$$tang.\,I = \frac{tang.\,\lambda}{sin.\,(l-N)} = \frac{tang.\Lambda}{sin.\,(L-N)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(VI)}$$

§. 10.

Quam difficilia observatu sint momenta disparitionum et reapparitionum, quando transeat per solis terraeque centrum annuli planum, observationes nonnunquam tantopere a se discedentes, ostendunt.

Licet **La Lande** (1) se observasse dicat, non prius disparere annulum, quam ipso die, quo per terrae centrum transeat annuli planum; ostendunt tamen dissidentes ab eo observationes, quam parum ea de re constet. Hoc tamen verum esse, propter terrae motum, majore cum celeritate transitum plani annuli per centrum terrae transire, quam per solis centrum, eoque melius posse disparitionem observari, quae originem habeat ex transitu per terrae centrum, quam illam, quae ex transitu per centrum solis oriatur. Huc accedit, habere nos quod ad terrae transitus duas phases correspondentes, saepeque tres transitus intervallo non magno, quo fit, ut determinatio semper accuratius fiat. Praeterea, si occasio se praebeat, diligenter attendere debemus, ut in disparitione ultimum diem observemus, quo annulum conspicamur et primum diem, quo sine annulo planetam videmus, atque apud reapparitionem ultimum diem, quo conspicamur planetam sine annulo, primumque, quo annuli videmus vestigia diem, unde fit, ut nanciscamur duos limites, inter quos disparuit rursusque apparuit annulus. Praetereunt autem, inquit **Bessel**, multi dies inter hos limites, notabilem relinquunt incertitudinem de situ lineae nodorum annuli; neque adjumenta habemus, quibus illum alicubi per mensiones, quae multis in casibus frustratam potest restituere observationem, limitibus angustioribus includamus. Si ergo tres observavimus non tanta se invicem dissitos transitus, elevationem terrae supra aut sub annuli plano, adhuc ut tertiam quantitatem ignotam afferre possumus, ut fecit **Delambre** (2).

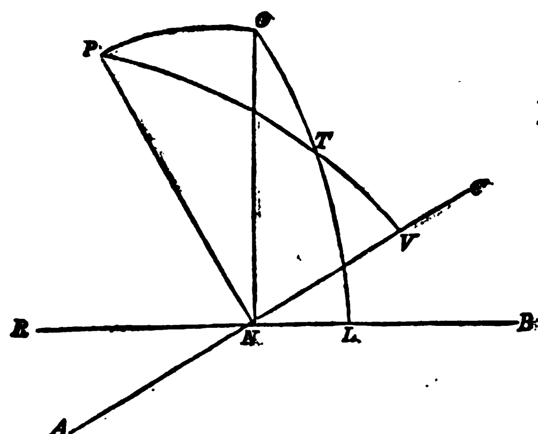
§. 11.

Methodus Delambri (3).

Delambre sequentem iniit viam: Ponatur Saturni annulum planum esse, coïncidentem planetae aequatore. Sit Figura apposita, P polus rotationis, O orbitae BR polus planetae, AC aequator planetae atque T locus terrae ex centro planetae aut annuli visus, quem hoc in casu ponemus coïncidere, N locus ascendentis nodi, tunc TL est latitudo planeticentrica terrae $= p$.

---

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1774, pag. 91.
(2) **Delambre**, *Astronomie théorique et pratique*, Tom. III. Chap. XXIX.
(3) **Delambre**, *ibidem*.



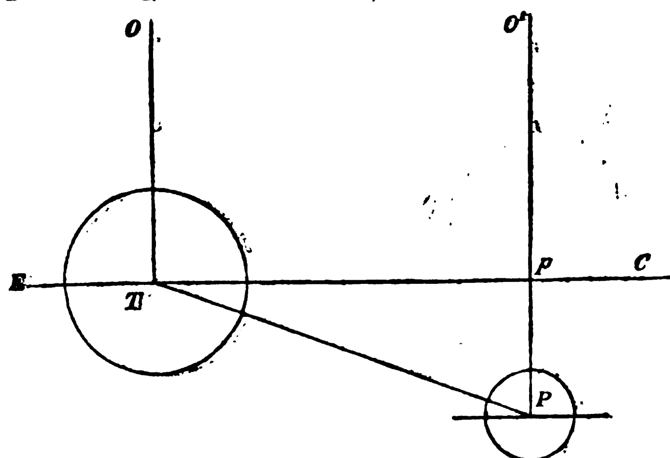
NL longitudo planeticentrica terrae minus longitudo nodi = ♁ — ☊, atque ergo

$$OT = 90° - p,$$

$$POT = 90° + NOT = 90° + NL = 90° + ♁ - ☊,$$

PO aequatoris inclinatio in orbitam = i quum sit, praebet triangulum sphaericum POT, $\cos.\ PT = \sin.\ TV = \cos.\ PO \cos.\ OT + \sin.\ PO \sin.\ OT \cos.\ POT = \cos.\ i \sin.\ p - \sin.\ i \cos.\ p \sin.\ (♁ - ☊)$.

Quum autem simplicius faciliusque sit, ecliptica uti orbitae planetae loco, ponatur in eadem Figura, P rotationis polus, O eclipticae polus, tunc longitudo planeticentrica terrae in ecliptica aequalis est planetae longitudini geocentricae + 180°. Terrae latitudo planeticentrica aequalis est planetae latitudini geocentricae, cum opposito signo sumtae.



Sit enim figura apposita T terra, EC ecliptica, TO ejus axis atque P planeta; tunc erit distantia planetae geocentrica ad eclipticae polum OTP = 90° + CTP = 90° + latitudo geocentrica australis.

Esto nunc PO parallelus TO aut perpendicularis in EC; PO' potest etiam ut axis eclipticae considerari, quia Tp nil est respectu radii sphaerae coelestis; considerari tunc duo puncta O et O' possunt, ut unum idemque punctum, lineae TO et pO' ut una eademque linea; distantia terrae ad eclipticae polum et conspicata ex planetae centro est = O'PT = 180° — OTP = 180° — 90° — latitudo geocentrica planetae = 90° — latitudo geocentrica planetae.

Quando nunc in formula supra reperta ponimus

$$TV = E;\ i = I;\ p = -\lambda;\ ♁ = 180° + l;\ \text{atque}\ ☊ = N;$$

nanciscimur

$$\sin.\ E = -\cos.\ I \sin\ \lambda + \sin.\ I \cos.\ \lambda \sin.\ (l - N)$$

$$= \sin.\ I \cos.\ \lambda \sin.\ l \cos.\ N - \sin.\ I \cos.\ \lambda \cos.\ l \sin.\ N - \cos.\ I \sin.\ \lambda$$

$$\frac{\sin.\ E}{\cos.\ I} = \cos.\ \lambda \sin.\ l\ \text{tang.}\ I \cos.\ N - \cos.\ \lambda \cos.\ l\ \text{tang.}\ I \sin.\ N - \sin\ \lambda \ .\ .\ (\text{VII}).$$

Quando terra est in annuli plano, illud momentum est, $E = 0$, habemusque

$$0 = -\cos. I \sin. \lambda + \sin. I \cos. \lambda \sin. (l - N);$$
$$\sin. I \cos. \lambda \sin. (l - N) = \cos. I \sin. \lambda,$$

vel

$$\sin. (l - N) = \frac{tang.\ \lambda}{tang.\ I},$$

ut supra etiam invenimus.

§. 12.

Vidimus aeque annulum disparerere posse, quoniam ejus planum per solis centrum transit, atque eum transire per centrum terrae. Ut ergo sciamus, quanam utriusque hujus causae dispareat annulus, periodos perscrutemur, quibus haec phaenomena obtineant, non enim in utroque casu eadem esse possunt. Pendent transitus per solis centrum duntaxat ab annuli aut Saturni circum solem motu; transitusque per centrum terrae etiam illi a terrae motu pendent.

Quando diligenter seriem disparitionum reapparitionumque annuli observamus, animadvertimus esse quae sibi invicem in quaque revolutione siderali valde accurate eodemque ordine succedant; unde per se concludendum est, eas originem habere ex transitu plani annuli per solem. Ecce seriem phasium, ut observatae sunt:

1715	Febr. 10	Reapp.	Maraldi (1).
1774	Januar. 11	Reapp.	Messier (2).
1789	Octob. 10	Dispar.	Mechain (3).
1803	Jun. 16	Dispar.	Schröter (4).
1832	inter Dec. 7 et 12	Reapp.	Bessel (5).

Quae hic traduntur tantummodo ut approximationes consideranda sunt, quoniam annulus non subito disparet rursusque apparet; sensim sensimque annulum ex oculis amittimus, eumque eo diutius videmus, quo perfectiores sint tubi optici; contrariumque obtinet, quando iterum apparet. Hinc non quidem fieri potest, ut ipsum momentum quo per solem transit magna cum diligentia definiamus.

---

(1) *Mém. de l'Acad. des Sciences*, années 1715 et 1716.

(2) *Nouveaux Mém. de Berlin*, 1776.

(3) *Connaissance des temps pour l'an* 1792.

(4) *Kron. Fragm.*, Th. I. pag. 209.

(5) *Astron. Nachr.* N°. 236. pag. 323.

Si epocha 1715 sideralem Saturni revolutionem vel annos 29 Julianos et 166,71984 addimus, nanciscimur alteram phasin die 26 Julii anni 1744; hujus autem non exstant observationes, propterea quod in radiis solaribus disparet Saturnus; hinc iterum sideralem revolutionem annumerantes accipimus diem 10 Januarii 1774; eodem modo nanciscimur diem 26 Junii 1803; et ex eo tempore rursus 10 Decembris 1832 deducemus.

Epocha anni 1789 praebebit 26 Martii 1819; quia autem propter solis propinquitatem in Februario Saturnus invisibilis fiebat, hoc tempore observare nequiverunt et disparitionem annuli et reapparitionem (1).

Haec convenientia nimis est accurata, quam ut casui eam tribuamus. Ostendit illa evidenter legem, secundum quam hae sibi invicem succedant phases; quumque earum reditus non pendeant a revolutione terrae circum solem, necesse est, ut exinde concludamus eas pertinere ad annuli per solis centrum transitus.

Videmus ergo has phases duas distinctas formare series, atque in unaquaque harum serierum annuli per solis centrum transitus redire post completam Saturni revolutionem sideralem. Utraque illa series sine dubio pertinet ad duos situs oppositos, in quibus ut annulus soli occurrat, necesse est; quique ergo annuli sunt in orbita Saturni nodi. Hinc etiam sequitur, hos duos annuli situs semper convenire cum iisdem locis orbitae planetae; *planum nempe annuli constanter parallelum sibi in orbita Saturni manere;* hancque ob causam, *ejus linea intersectionis in plano eclipticae semper constantem angulum cum linea intersectionis orbitae in hoc plano formare debet.*

§. 13.

Transeamus ergo ad illud, ut quasdam observationes ad Delambri methodum applicemus; hunc in finem sumatur formula §. 11, scilicet

$$\frac{\sin. E}{\cos. I} = \cos.\lambda \sin. l \,\tan g. I \cos. N - \cos.\lambda \cos. l \,\tan g. I \sin. N - \sin.\lambda \quad . \; . \quad \text{(VII)}$$

ponaturque in ea

$$\tan g. I \cos. N = x, \quad \tan g. I \sin. N = y;$$

tunc adest

$$\frac{\sin. E}{\cos. I} = \cos.\lambda \sin. l \times x - \cos.\lambda \cos. l \times y - \sin.\lambda$$

in qua formula adsunt tria ignota x, y et E, quae tribus breviter sibi succe-

(1) Bode, *Astr. Jahrb.* 1823, pag. 154.

dentibus observationibus plani annuli per terrae centrum possumus determinare; hunc in finem sumamus ex observationibus, quas deinceps ponemus, iterum iterumque tres tales breviter sibi invicem succedentes observationes, earumque geocentricas Saturni longitudines latitudinesque computemus.

Primo nobis est

1°. 1714 Octobr. 16 hora 0 . . . . $l = 169° 18' 55'',7$ . . . . $\lambda = + 1° 52' 31'',1$
2°. 1715 Mart. 22 » 0 . . . . $l = 170\ 11\ 15\ ,5$ . . . . $\lambda = + 2\ 24\ 25\ ,0$
3°. 1715 Julii 12 » 9 . . . . $l = 169\ 50\ 4\ ,6$ . . . . $\lambda = + 2\ 8\ 13\ ,6$

Unde illa sequitur calculatio:

1°.

Log. sin. l = *Log. sin.* 169°18'55'',7 = 9.2681127 *Log. cos.* l = *Log. cos.* 169°18'55'',7 = 9,9924046 n.
Log. cos. λ = *Log. cos.* 1 52 31 ,1 = 9.9997673 *Log. cos.* λ = *Log. cos.* 1 52 31 ,1 = 9.9997673

9.2678800 9.9921719 n.

sin. l *cos.* λ = 0,1853020 *cos.* l *cos.* λ = — 0,9821364

Log. sin. λ = *Log. sin.* 1°52'31'',1 = 8.5148718
sin. λ = 0,0327244.

Quia E hoc loco australis est, vertantur signa secundi membri, ita ut nobis sit

$$\frac{sin.\, E}{cos.\, I} = - 0,1853020.\ x - 0,9821364.\ y + 0,0327244.$$

2°.

Log. sin. l = *Log. sin.* 170°11'15'',5 = 9.2315258 *Log. cos.* l = *Log. cos.* 170°11'15'',5 = 9.9935998 n.
Log. cos. λ = *Log. cos.* 2 24 50 ,0 = 9.9996145 *Log. cos.* λ = *Log. cos.* 2 24 50 ,0 = 9.9996145

9.2311403 9.9932143 n.

sin. l *cos.* λ = 0,1702708 *cos.* l *cos.* λ = — 0,9844966

Log. sin. λ = *Log. sin.* 2°24'50'',0 = 8.6244662
sin. λ = 0,04211785

ergo

$$\frac{sin.\, E}{cos.\, I} = 0,1702708.\ x + 0,9844966.\ y - 0,04211785.$$

3°.

Log. sin. l = *Log. sin.* 169°50' 4'',6 = 9.2467205 *Log. cos.* l = *Log. cos.* 169°50' 4'',6 = 9.9931286 n.
Log. cos. λ = *Log. cos.* 2 8 13 ,6 = 9.9996979 *Log. cos.* λ = *Log. cos.* 2 8 13 ,6 = 9 9996979

9.2464184 9.9928265 n.

sin. l *cos.* λ = 0,1763674 *cos.* l *cos.* λ = — 0,983618

Log. sin. λ = *Log. sin.* 2° 8'13'',6 = 8.5715665
sin. λ = 0,03728781

igitur nobis est

$$\frac{sin.\,E}{cos.\,I} = 0{,}1763674.\,x + 0{,}983618.\,y - 0{,}03728781.$$

Trium aequationum

$$\frac{sin.\,E}{cos.\,I} = -\,0{,}1853020.\,x - 0{,}9821364.\,y + 0{,}0327244$$
$$= +\,0{,}1702708.\,x + 0{,}9844966.\,y - 0{,}04211785$$
$$= +\,0{,}1763674.\,x + 0{,}9836180.\,y - 0{,}03728781\,;$$

primam a secunda secundamque a tertia subtrahentes, nobis est,

$$0{,}3555728.\,x + 1{,}9666330.\,y - 0{,}07484225 = 0$$
$$0{,}0060966.\,x - 0{,}0008786.\,y + 0{,}00483004 = 0$$

unde sequitur

$$x = -\frac{1{,}9666330}{0{,}3555728}\,y + \frac{0{,}07484225}{0{,}3555728} = -\,5{,}5308871\,y + 0{,}2104836$$
$$x = +\frac{0{,}0008786}{0{,}0060966}\,y - \frac{0{,}00483004}{0{,}0060966} = +\,0{,}1277105\,y - 0{,}7922514$$

hac ultimae aequationes praebent

$$5{,}6585976\,y - 1{,}0027350 = 0$$
$$y = \frac{1{,}0027350}{5{,}6585976} = 0{,}1772056$$
$$x = 0{,}1277105 \times 0{,}1772056 - 0{,}7922514$$
$$= -\,0{,}7696204$$

$$\frac{tang.\,I\ sin.\,N}{tang.\,I\ cos.\,N} = \frac{y}{x} \qquad\qquad tang.\,I = \frac{y}{sin.\,N}$$

$$tang.\,N = \frac{y}{x} = -\frac{0{,}1772056}{0{,}7696204}$$

$$Log.\,y = Log.\ 0{,}1772056 = 9.2484775$$
$$Log.\ sin.\,N = Log.\ sin.\,167^\circ 2' 0'',9 = 9.3509840$$
$$Log.\ tang.\ I = 9.8974935$$
$$I = 38^\circ\,18'\,0'',5$$

$$Log.\ 0{,}1772056 = 9.2484775$$
$$Log.\ 0{,}7696204 = 9.8862765$$
$$Log.\ tang.\ N = 9.3622010\,n.$$
$$N = 167^\circ\,2'\,0'',9$$

Quod ad elevationem E nobis tunc sunt tres sequentes aequationes:

Quod ad primam observationem.

$$\frac{sin.\,E}{cos.\,I} = -\,0{,}1853020.\,x - 0{,}9821364.\,y + 0{,}0327244$$

$$Log.\ 0{,}1853020 = 9.2678899\,n.$$
$$Log.\,x = Log.\ 0{,}7696204 = 9.8862765\,n.$$
$$9.1541565$$
numerus = 0.1426121

$$Log.\ 0{,}9821364 = 9.9921719\,n.$$
$$Log.\ y = Log.\ 0{,}1772056 = 9.2484775$$
$$9{,}2406494\,n.$$
numerus = — 0,1740401

$$\frac{sin.\ E}{cos.\ I} = 0{,}1426121 - 0{,}1740401 + 0{,}0327244$$

$$sin.\ E = -\ 0{,}0012964.\ cos.\ I$$

$$Log.\ 0{,}0012964 = 7.1127390$$

$$Log.\ cos.\ I = Log.\ cos.\ 38^{\circ}\,18'\,0'',5 = 9.8947451$$

$$Log.\ sin.\ E = 7.0074841$$

$$E = -\ 3'\,29'',8.$$

Quod ad secundam observationem.

$$\frac{sin.\ E}{cos.\ I} = 0{,}1702708.\,x + 0{,}9844966.\,y - 0{,}04211785$$

$$Log.\ 0{,}1702708 = 9.2311403 \qquad Log.\ 0{,}9844966 = 9.9932143$$

$$Log.\ x = 9.8862765\ n. \qquad Log.\ y = 9.2484775$$

$$9.1174168\ n. \qquad 9.2416918$$

$$numerus = -\ 0{,}1310439 \qquad numerus = 0.1744583$$

$$\frac{sin.\ E}{cos.\ I} = -\ 0{,}1310439 + 0{,}1744583 - 0{,}04211785$$

$$sin.\ E = 0{,}0012966.\ cos.\ I$$

$$Log.\ 0{,}0012966 = 7.1128060$$

$$Log.\ cos.\ I = 9.8947451$$

$$Log.\ sin.\ E = 7.0075511$$

$$E = 3'\,29'',8$$

Quod ad tertiam observationem.

$$\frac{sin.\ E}{cos.\ I} = 0{,}1763674.\,x + 0{,}9836180.\,y - 0{,}03728781$$

$$Log.\ 0{,}1763674 = 9.2464148 \qquad Log.\ 0{,}9836180 = 9.9928265$$

$$Log.\ x = 9.8862765\ n. \qquad Log.\ y = 9.2484775$$

$$9.1326913\ n. \qquad 9.2413040$$

$$numerus = -\ 0{,}1357348 \qquad numerus = 0{,}1743026$$

$$\frac{sin.\ E}{cos.\ I} = -\ 0{,}1357348 + 0{,}1743026 - 0{,}03728781$$

$$sin.\ E = 0{,}0012800.\ cos.\ I$$

$$Log.\ 0{,}0012800 = 7.1072100$$

$$Log.\ cos.\ I = 9.1947451$$

$$Log.\ sin.\ E = 7.0019551$$

$$E = 3'\,27'',2$$

Eodem modo nobis est,

1°. 1773 Octobr. 10 hora 18 . . . . $l = 170°\,22'\,27'',7$ . . . . $\lambda = +\ 1°\,53'\,46'',2$
2°. 1774 April. 4 » 9 . . . . $l = 171\ \ 4\ 12\ ,2$ . . . . $\lambda = +\ 2\ \ 26\ \ 6\ ,2$
3°. 1774 Julii 1 » 9 . . . . $l = 170\ \ 43\ \ 4\ ,5$ . . . . $\lambda = +\ 2\ \ 11\ \ 22\ ,7$

E in prima observatione australis in duabus ultimis borealis est.

Nobis rursus ergo est:

1°.

Log. sin. l = *Log. sin.* 170°22'27",7 = 9.2232621 *Log. cos.* l = *Log. cos.* 170°22'27",7 = 9.9938423 n.
Log. cos. λ = *Log. cos.* 1 53 46 ,2 = 9.9997622 *Log. cos.* λ = *Log. cos.* 1 54 46 ,2 = 9.9997622

9.2230243 9.9936045 n.

sin. l *cos.* λ = 0,1671184 *cos.* l *cos.* λ = −0,9853818

Log. sin. λ = *Log. sin.* 1°53'46",2 = 8,5196746
sin. λ = 0,0330883

$$\frac{sin.\ E}{cos.\ I} = -\ 0{,}1671184.\ x - 0{,}9853818.\ y + 0{,}0330883$$

2°.

Log. sin. l = *Log. sin.* 171° 4'12",2 = 9.1909664 *Log. cos.* l = *Log. cos.* 171° 4'12",2 = 9.9947037 n.
Log. cos. λ = *Log. cos.* 2 26 6 ,2 = 9.9996077 *Log. cos.* λ = *Log. cos.* 2 26 6 ,2 = 9.9996077

9.1905741 9.9943114 n.

Log. l *cos.* λ = 0,1550865 *cos.* l *cos.* λ = −0,9869890

Log. sin. λ = *Log. sin.* 2°26'6",2 = 8.6282555
sin. λ = 0,0424869

$$\frac{sin.\ E}{cos.\ I} = 0{,}1550865.\ x + 0{,}9869890.\ y - 0{,}0424869$$

3°.

Log. sin. l = *Log. sin.* 170°43' 4",5 = 9.2076215 *Log. cos.* l = *Log. cos.* 170°43' 4",5 = 9.9942759 n.
Log. cos. λ = *Log. cos.* 2 11 22 ,7 = 9.9996828 *Log. cos.* λ = *Log. cos.* 2 11 22 ,7 = 9.9996828

9.2073043 9.9939587 n.

sin. l *cos.* λ = 0,1611774 *cos.* l *cos.* λ = −0,9861854

Log. sin. λ = *Log. sin.* 2°11'22",7 = 8 5821442
sin. λ = 0,0382071

$$\frac{sin.\ E}{cos.\ I} = 0{,}1611774.\ x + 0{,}9861854.\ y - 0{,}0382071.$$

Trium observationum

$$\frac{sin.\ E}{cos.\ I} = -\ 0{,}1671184.\ x - 0{,}9853818.\ y + 0{,}0330883$$
$$= \mp\ 0{,}1550865.\ x + 0{,}9869890.\ y - 0{,}0424869$$
$$= +\ 0{,}1611774.\ x + 0{,}9861854.\ y - 0{,}0382071$$

Primam aequationem a secunda secundaque a tertia subtrahentes, nanciscimur

$$0{,}3222049 . x + 1{,}9723708 . y - 0{,}0755752 = 0$$
$$0{,}0060909 . x - 0{,}0008036 . y + 0{,}0042798 = 0$$

unde sequitur

$$x = -\frac{1{,}9723708}{0{,}3222049} y + \frac{0{,}0755752}{0{,}3222049} = -6{,}1214798 . y + 0{,}2345563$$
$$x = +\frac{0{,}0008036}{0{,}0060909} y - \frac{0{,}0042798}{0{,}0060909} = +0{,}1319345 . y - 0{,}7026548$$

hae aequationes praebent

$$6{,}2534143\, y - 0{,}9372111 = 0$$
$$y = \frac{0{,}9372111}{6{,}2534143} = 0{,}1498719$$
$$x = 0{,}1319345 \times 0{,}1498719 - 0{,}7026548$$
$$= -0{,}6828815$$

$$\frac{tang. I\ sin. N}{tang. I\ cos. N} = \frac{y}{x} \qquad tang. I = \frac{y}{sin. N}$$

$$tang. N = \frac{y}{x} = -\frac{0{,}1498719}{0{,}6828815}$$

$Log.\ 0{,}1498719 = 9.1757190$ — $Log.\ y = Log.\ 0{,}1498719 = 9.1757190$

$Log.\ 0{,}6828815 = 9.8343453$ — $Log.\ sin.\ N = Log.\ sin.\ 167°37'17'',8 = 9{,}3311578$

$Log.\ tang.\ N = 9.3413737\ n.$ — $Log.\ tang.\ I = 9.8445612$

$N = 167°\ 37'\ 17'',8$ — $I = 34°\ 57'\ 31'',5$

Quod ad elevationem E, invenimus iterum sequentes valores;

Quod ad primam observationem.

$$\frac{sin. E}{cos. I} = -0{,}1671184 . x - 0{,}9853818 . y + 0{,}0330883$$

$Log.\ 0{,}1671184 = 9.2230243\ n.$ — $Log.\ 0{,}9853818 = 9.9936045\ n.$

$Log.\ x = Log.\ 0{,}6828815 = 9.8343453\ n.$ — $Log.\ y = Log.\ 0{,}1498719 = 9.1757190$

9.0573696 — $9.1693235\ n.$

numerus $= 0{,}1141220$ — numerus $= -0{,}1476806$

$$\frac{sin. E}{cos. I} = 0{,}1141220 - 0{,}1476806 + 0{,}0330883$$
$$sin. E = -0{,}0004703\ cos. I$$

$Log.\ 0{,}0004703 = 6.6723750$

$Log.\ cos.\ I = Log.\ cos.\ 34°57'31'',5 = 9.9135833$

$Log.\ sin.\ E = 6.5859583$

$E = -1'\ 19'',5$

Quod ad secundam observationem.

$$\frac{sin.\,E}{cos.\,I} = +\,0{,}1550865.\,x + 0{,}9869890.\,y - 0{,}0424869$$

Log. 0,1550865 = 9.1905741 — *Log.* 0,9869890 = 9.9943114

Log. x = 9.8343453 n. — *Log.* y = 9.1757190

9.0249194 n. — 9.1700304

numerus = — 0,1059057 — numerus = 0,1479211

$$\frac{sin.\,E}{cos.\,I} = -\,0{,}1059057 + 0{,}1479211 - 0{,}0424869$$

sin. E = — 0,0004715 *cos.* I.

Log. 0,0004715 = 6.6734817

Log. cos. I = 9.9135833

Log. sin. E = 6.5870650

E = — 1′ 19″,7

Quod ad tertiam observationem.

$$\frac{sin.\,E}{cos.\,I} = +\,0{,}1611774.\,x + 0{,}9861854.\,y - 0{,}0882071$$

Log. 0,1611774 = 9.2073043 — *Log.* 0,9861854 = 9.9939587

Log. x = 9.8343453 n. — *Log.* y = 9.1757190

9.0416498 n. — 9.1699777

numerus = — 0,1100651 — numerus = 0,1478011

$$\frac{sin.\,E}{cos.\,I} = -\,0{,}1100651 + 0{,}1478011 - 0{,}0882071$$

sin. E = — 0,0004711 *cos.* I

Log. 0,0004711 = 6.6731131

Log. cos. I = 9.9135833

Log. sin. E = 6.5866964

E = — 1′ 19″,6

Observationes annorum 1714 et 1715, tali modo computatae, haec ergo praebent resultata:

N = 167° 2′ 0″,9; I = 38° 18′ 0″,5

E = — 3′ 29″,8; E = + 3′ 29″,8; E = + 3′ 27″,2

illaeque annorum 1773 et 1774 praebent

N = 167° 37′ 17″,8; I = 34° 57′ 31″,5

E = — 1′ 19″,5; E = — 1′ 19″,7; E = — 1′ 19″,6

Eodem modo agens Delambre, calculatis annorum 1789 et 1790 observationibus accipit (1)

$$N = 167^\circ 51'; \quad I = 35^\circ 18'$$

$$E = + 3' 3''; \quad E = + 3' 2; \quad E = - 3' 4''$$

Propter observationum dubium, hic non certa resultata exspectare possumus, licet illud, monente Delambrio, simplex universalisque sit methodus, qua utebantur usque ad illius aetatem.

§. 14.

Utendo formulis (I) et (II), in quibus elevatio = 0 ponitur, auxilio duarum primarum observationum, earum nempe anni 1789, Delambre nactus est haec resultata (2):

$$N = 167^\circ 46'; \quad I = 35^\circ 13' 30''$$

et conjungendo geocentricam cum heliocentrica aequatione, nanciscebatur observatis disparitionibus tertii et decimi quinti Octobris 1789

$$N = 168^\circ 6'; \quad I = 38^\circ 54'$$

Magnum illud discrimen quod ad inclinationem cum praecedente adscribit Delambre incertae observationi transitus plani annuli per solem.

§. 15.

Quando formulas

$$tang.\ \left(\frac{l+L}{2} - N\right) = \frac{sin.\ (\lambda + \Lambda)\ tang.\ \frac{1}{2}(l - L)}{sin.\ (\lambda - \Lambda)} \quad \ldots \ldots \quad (V)$$

$$tang.\ I = \frac{tang.\ \lambda}{sin.\ (l - N)} = \frac{tang.\ \Lambda}{sin.\ (L - N)} \quad \ldots \ldots \quad (VI)$$

ad geocentricam disparitionem 19 Decembri 1802 atque heliocentricam disparitionem 16 Junii 1803 applicamus, nobis est

1802 Decemb. 18 hora 18	. . .	$l =$	170° 33′ 54″,5	. . .	$\lambda =$	+ 2° 1′ 4″,6
1803 Junii 16 » 12	. . .	$L =$	170 46 30 ,0	. . .	$\Lambda =$	+ 2 8 5 ,2
		$l + L =$	341 20 24 ,5		$\lambda + \Lambda =$	4 9 9,8
		$\frac{1}{2}(l + L) =$	170 40 12 ,2		$\lambda - \Lambda =$	− 0 7 0 ,6
		$l - L =$	− 0 12 35 ,5			
		$\frac{1}{2}(l - L) =$	− 0 6 17 ,7			

(1) Delambre, *Astronomie théorique et pratique*, Tom. III. Chap. XXIX. pag. 86.
(2) Delambre, *ibidem*, pag. 88.

$$Log.\,sin.\,(\lambda + \Lambda) = Log.\,sin.\ \ 4^\circ 9'\ 9'',8 = 8.8598299$$
$$Log.\,tang.\,\tfrac{1}{2}(l - L) = Log.\,tang. - 0\ 6\ 17\ ,7 = 7.2627220\ n.$$
$$6.1225519\ n.$$
$$Log.\,sin.\,(\lambda - \Lambda) = Log.\,sin. - 0\ 7\ 0\ ,6 = 7.3094436\ n.$$
$$Log.\,tang.\,\left(\frac{l+L}{2} - N\right) = 8.8131083$$
$$\frac{l+L}{2} - N = 3^\circ 43' 14'',4$$
$$\frac{l+L}{2} = 170\ 40\ 12\ ,2$$
$$N = 166^\circ 56' 57'',8$$

$$l = 170^\circ 33' 54'',5 \qquad L = 170^\circ 46' 30'',0$$
$$N = 166\ 56\ 57\ ,8 \qquad N = 166\ 56\ 57\ ,8$$
$$l - N = 3\ 36\ 56\ ,7 \qquad L - N = 3\ 49\ 32\ ,2$$

$Log.\,tang.\,\lambda = Log.\,tang.\,2^\circ\ 1'\ 4'',6 = 8.5469662$ $Log.\,tang.\,\Lambda = Log.\,tang.\,2^\circ\ 8'\ 5'',2 = 8.5714311$
$Log.\,sin.\,(l-N) = Log.\,sin.\,3\ 36\ 56\ ,7 = 8.7997875$ $Log.\,sin.\,(L-N) = Log.\,sin.\,3\ 49\ 32\ ,2 = 8.8242554$

$Log.\,tang.\,I = 9.7471787$ $Log.\,tang.\,I = 9.7471757$
$I = 29^\circ 11' 31'',5$ $I = 29^\circ 11' 30'',5$

Nanciscitur Delambre per Flaugerguesii observationes, quae hae sunt (1):

1802 Dec. 14 hora 16 .... $l = 170^\circ 25' 47''$ .... $\lambda = 2^\circ 0' 17''$
1803 Jan. 14 hora 9 .... $L = 170\ 40\ 30$ .... $\Lambda = 2\ 8\ 13$

illa resultata

$$N = 166^\circ 43' 11''; \quad I = 28^\circ 24' 40''$$

addit autem, quod, praeter accuratam observationem transitus plani annuli per solem, exigui arcus, ut $\lambda - \Lambda$ et $\frac{1}{2}(l - L)$ nimis a diligentia tabularum Saturni pendeant, quam ut iis certo confidere possimus; quoniam data aliquot minutis secundis mutando, invenerit

$$N = 167^\circ 9' \quad \text{fere } 2'$$
$$\text{et } I = 31^\circ 26' 30''$$

Delambre resultata ad ea, quae antea, posuerat, contorquere videtur. Praeterea addit: » On ne peut donc compter sur rien.”

---

(1) Delambre, *in opere citato*, pag. 94.

§. 16.

Ut adhuc duos plani annuli per terrae centrum transitus calculemus, anni 1833 observationes sumemus, quae sunt

1833 April. 27 hora 9 . . . $l = 171° 49' 52'',4$ . . . $\lambda = 2° 25' 30'',5$

1833 Junii 13 hora 10 . . . $l' = 171\ 37\ 31,9$ . . . $\lambda' = 2\ 16\ 33,1$

ad illa quod attinet sumantur hae formulae:

$$tang.\left(\frac{l+l'}{2} - N\right) = \frac{tang\ \frac{1}{2}(l-l')\ sin.(\lambda+\lambda')}{sin.(\lambda-\lambda')} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (I)$$

$$tang.\ I = \frac{tang.\ \lambda}{sin.(l-N)} = \frac{tang.\ \lambda'}{sin.(l'-N)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (II)$$

Nobis est igitur

$l + l' = 343° 27' 24'',3$ $\qquad \lambda + \lambda' = 4° 42' 3'',6$

$\frac{1}{2}(l + l') = 171\ 43\ 42,1$ $\qquad \lambda - \lambda' = 0\ 8\ 57,4$

$l - l' = 0\ 12\ 20,5$

$\frac{1}{2}(l - l') = 0\ 6\ 10,25$

$Log.\ tang.\ \frac{1}{2}(l-l') = Log.\ tang.\ 0°\ 6'\ 10'',25 = 7.2540701$

$Log.\ sin.\ (\lambda+\lambda') = Log.\ sin.\ 4\ 42\ 3,6 = 8.9135863$

6.1676564

$Log.\ sin.\ (\lambda-\lambda') = Log.\ sin.\ 0\ 8\ 57,4 = 7.4158719$

$Log.\ tang.\left(\frac{l+l'}{2} - N\right) = 8.7517845$

$\frac{l+l'}{2} - N = 3° 13' 54'',6$

$\frac{l+l'}{2} = 171\ 43\ 42,1$

$N = 168\ 29\ 47,5$

$l = 171° 49' 52'',4$ $\qquad l' = 171° 37' 31'',9$

$N = 168\ 29\ 47,5$ $\qquad N = 168\ 29\ 47,5$

$l - N = 3\ 20\ 4,9$ $\qquad l' - N = 3\ 7\ 44,4$

$Log.\ tang.\ \lambda = Log.\ tang. 2°25'30'',5 = 8.6268734$ $\qquad Log.\ tang.\ \lambda' = Log. tang. 2°16'33'',1 = 8.5992516$

$Log. sin.(l-N) = Log.\ sin.\ 3\ 20\ 4,9 = 8.7646882$ $\qquad Log. sin.(l'-N) = Log. sin.\ 3\ 7\ 44,4 = 8.7370670$

$Log.\ tang.\ I = 9.1621852$ $\qquad Log.\ tang.\ I = 9.8621846$

$I = 36° 3' 28'',8$ $\qquad I = 36° 3' 28'',8$

Videmus exinde, quam parum observationibus transituum terrae fidere possi-

mus. **Delambre** eodem modo calculavit observationes transituum 14 Decembris 1802 et 10 Januarii nanciseiturque (1)

$$N = 168°7'7''; \quad I = 40°57'30''.$$

Maraldi suam quod attinet ad has computationes methodum ostendens (2), eas tribus applicat observationibus; sumitque ideo duos situs Saturni observatos et tertium e tabulis. Inclinationem ponit 31° 21′, unde longitudinem nodi deducit, atque pro ea invenit 166° 12′ et 166° 17′, harum media sumta, praebet 166° 14′ 30″.

Delambre eas formulis (I) et (II) computans, accipit

$$1°. \quad N = 165°57'\ 5''; \quad I = 29°29'40'';$$
$$2°. \quad N = 166\ 43\ 14\ ; \quad I = 34\ 22\ 25;$$

harum media sumta, praebet

$$N = 166°20'9'',5; \quad I = 31°56'2'',5.$$

Monet quoque **Delambre**, se sua formula et duabus prioribus observationibus 1714 nancisci $N = 169°44'30''$, quod resultatum ipsi valde certum videtur, quia arcus $\lambda - \lambda'$ et $\frac{1}{2}(l - l')$ quodammodo magni sunt.

Cum hujusmodi longitudine invenit

$$I = 29°18'4''$$

quod ipsi quidem nimis parum videtur, ideoque affert, quod, quando latitudo secundae observationis 1′ augetur, nanciscimur

$$I = 29°29'40'';$$

atque ergo 11′ 36″ plus; attamen videtur, sicut ipse dicit, inclinationem ad eclipticam non 30° contenturam esse.

§. 17.

Bessel conjungebat observationes maximae annuli aperturae cum iis disparitionum reapparitionumque; ecce ejus fundamenta (3).

Maximae annuli anno 1811 aperturae tempore, **Bessel** postquam Dollondico suo heliometro tubum opticum 16 pollicum adjunxit, sequentes accepit observationes axium tam majoris, quam minoris:

---

(1) **Delambre**, *Astronomie théor. et prat.*, Tom. III. pag. 95.

(2) *Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences année* MDCCXVI. pag. 177. **Delambre**, *in Opere laudato*, pag. 96.

(3) *Königsberger Archiv für Naturwissenschaft und Mathematik*, 2tes Stück. pag. 126 seqq.

	axis maj. annuli	axis min. annuli	
1811 Maji 14	39″,66	17″,91	4 Observ.
18	39 ,87	17 ,97	4 »
21	39 ,62	18 ,00	2 »
22	40 ,50	18 ,47	1 »
Junii 5	39 ,71	77 ,63	2 »
8	40 ,50	19 ,18	2 »
11	40 ,85	18 ,72	2 »

Observationes 14, 18 et 21 Maji, occasionibus maximae faventibus factae erant. Illae observationes, ad mediam Saturni a terra distantiam reductae, praebent:

1811 Maji 14	38″,20	17″,25	4 Observ.
18	38 ,37	17 ,29	4 »
21	37 ,93	17 ,23	2 »
22	38 ,74	17 ,67	1 »
Junii 5	37 ,70	16 ,74	2 »
8	38 ,42	18 ,20	2 »
11	38 ,73	17 ,81	2 »

Medium harum dimensionum, quod ad observationum numerum, quae cuique eorum fundamento sunt, vero diametro annuli in media distantia Saturni a terra praebet

= 38″,2694 . . . . 17 Observ.

Quoniam dimensiones axis minoris ellipseos, inclinationem plani annuli non directe, sed tantummodo ope cognitae nodorum longitudinis praebere possunt, duo haec elementa inter se conjungebat, resultatumque nanciscebatur,

Pro inclinatione plani annuli ad eclipticam . . . . = 28° 34′ 6″
et pro longitudine nodorum pro 1 Januario 1800 . . . = 166 52 11
cum annuo motu + 40″,57.

Unde quod ad situm plani annuli orbitae saturni ratione habita nactus est.

Inclinationem . . . . = $27° 12' 26'' + 0'',52\,(t - 1800)$
Longitudinem lineae nodorum . . = $170\ 49\ 54 + 41'',00\,(t - 1800)$
in quibus t significat annum aerae Christianae.

§. 18.

Observatae annuli disparitiones et reapparitiones, et per solem et per terram transitum quibus Bessel ad illud utitur, sunt sequentes:

Transitus per annuli planum:

1.	1714	Octobr.	13	hora	0	Disparitio.	Terra se movebat a meridie ad septemtrionem.
2.	1715	Febr.	10	»	0	Reapparitio.	Sol se movebat a meridie ad septemtrionem.
3.	»	Mart.	23	»	0	Disparitio.	Terra se movebat a septemtrione ad meridiem.
4.	»	Jul.	11	»	0	Reapparitio.	Terra se movebat a meridie ad septemtrionem.
5.	1773	Octobr.	11	»	6	Disparitio.	Terra se movebat a meridie ad septemtrionem.
6.	1774	Jan.	10	»	0	Reapparitio.	Sol se movebat a meridie ad septemtrionem.
7.	»	Apr.	4	»	0	Disparitio.	Terra se movebat a septemtrione ad meridiem.
8.	»	Jul.	1	»	9	Reapparitio.	Terra se movebat a meridie ad septemtrionem.
9.	1789	Maj.	6	»	0	Disparitio.	Terra se movebat a septemtrione ad meridiem.
10.	»	Aug.	28	»	10 30′	Reapparitio.	Terra se movebat a meridie ad septemtrionem.
11.	»	Octobr.	6	»	0	Disparatio.	Sol se movebat a septemtrione ad meridiem.
12.	1790	Jan.	29	»	6 15′	Reapparitio.	Terra se movebat a septemtrione ad meridiem.
13.	1802	Dec.	20	»	16	Disparitio.	Terra se movebat a meridie ad septemtrionem.
14.	1803	Jan.	3	»	13 30′	Reapparitio.	Terra se movebat a septemtrione ad meridiem.
15.	»	Jun.	16	»	9 30	Disparitio.	Sol se movebat a meridie ad septemtrionem.

Inquirunt autem hae observationes Besselii adhuc ulterius, quantus elevationis angulus in quaque illarum sit; qui semper tanto minor esse debet, quanto tubus opticus perfectior est, qui hisce adhibetur observationibus; quae tamen, si bonae sint, punctum zero nunquam transgredi possunt; hoc est, quando terra vel sol, disparente annulo a septemtrione ad meridiem transit, elevatio semper debet esse positiva vel borealis; quando autem a meridie ad septemtrionem transit, negativa vel australis. Contra autem, quando in reapparitione, terra vel sol a septemtrione ad meridiem transit, angulus elevationis semper negativus vel australis et quando a meridie ad septemtrionem transeunt, semper positivus vel borealis esse debet. Hic ergo pro certo ponitur ambae facies annuli parallelae, ejusque crassitudinem tam exiguam esse, ut ea per tubos ad ejus observationes adhibitos dispareat. Ut hoc illustremus exemplo: secundum hanc positionem, 13 Octobris 1714, quia annulus tunc disparebat, quia terra transibat ab australi plano ad borealem, terra, quando observatio fiebat, debebat adhuc esse ad meridiem plani annuli; eodemque modo, terra vel sol in secunda, tertia et quarta observatione, ad septemtrionem plani annuli esse debebat, atque ita quod ad omnes alias attinet. Quando jam reperitur, hoc observationibus non satisfacere, utrum planum consistat, quod, quam proxime fieri possit, observationibus satisfaciat, quaerendum est.

Ex sequentibus eventibus, quos Bessel obtinuit, apparet, eos primae positioni non satisfacere. Ecce eos:

1714	Octobr.	13,	— 530″	♁	—
1715	Febr.	10,	+ 231	⊙	+
	Mart.	23,	— 457	♁	+
	Jul.	11,	— 252	♁	+
1773	Octobr.	11,	+ 651	♁	—
1774	Jan.	10,	+ 264	⊙	+
	Apr.	4,	+ 119	♁	+
	Jul.	1,	+ 173	♁	+
1789	Maj.	6,	— 546	♁	+
	Aug.	26,	+ 237	♁	+
	Octobr.	6,	+ 66	⊙	+
1790	Jan.	29,	— 105	♁	—
1802	Dec.	20,	— 96	♁	—
1803	Jan.	3,	— 173	♁	—
	Jun.	16,	— 204	⊙	—

Illae sunt latitudines vel elevationes terrae vel solis; supra annuli planum, cujus situm supra dedimus, quaeque tali sunt definiti modo, ut summae quadratorum illius latitudinum; quae supersunt, quam minimae sint. Signa, quae post latitudines vel elevationes stant, ea sunt, quae secundum positionem esse debeant.

Quum ergo latitudinum mutatio in observationes

$$1 \text{ ad } 8 \text{ et } 13 \text{ ad } 15 \text{ fere } -0{,}475\,n + 0{,}08\,i,$$
$$\text{et } 9 \text{ ad } 12 \text{ fere } +0{,}475\,n - 0{,}08\,i,$$

contineat, (significat n longitudinis atque i inclinationis mutationem), concipiemus impossibilitatem talis situs plani alicujus, quod omnibus latitudinibus vel elevationibus, signa praebeat, quae post illas ponuntur.

Unde ergo Bessel merito concludit, facies laterales annuli non paralleliter currere, crassitudinemque annuli propterea non tanquam disparentem considerari posse.

Comparatione situum plani pag. 59 datorum, atque ex diametro pag. 58 computati axis minoris, cum observatis, Besselius invenit differentias sequentes:

14 Maji	praebet	calculum		+ 0″,05
18 »	»	»		+ 0 ,01
21 »	»	»		+ 0 ,09
22 »	»	»		— 0 ,34

5 Jun.	praebet	calculum	+	0″,62
8	»	»	—	0 ,82
11	»	»	—	0 ,42

Horum medium fit proximum = 0, quando consideratur, ut Bessel ait, se convictum esse, axem minorem, non majorem esse posse, quam 19″,18 velut ille cum 8 Junii mensus est (1).

Ita ut planum, quod datum est, quam proximum fieri potest, observationibus satisfaciat, et quod ad disparitiones, et quod ad axes minores.

§. 19.

Inclinationis determinatio secundum Struve (2).

Struve *Dorpati* ope micrometricarum suarum observationum, magno refractore Fraunhoferi, 540plici amplificatione institutarum, cum constitutio aeris esset valde idonea, sequentes valores, quod ad axem majorem minoremque annuli, nactus est:

Anno 1826.			axis major	axis minor
1°.	Febr.	16,32	44″,07	20″,05
2°.	»	17,17	44 ,12	19 ,88
3°.	»	25,22	43 ,56	19 ,37
4°.	Martii	4,23	42 ,82	18 ,92
5°.	»	5,25	42 ,62	19 ,46
6°.	»	6,25	43 ,07	19 ,55

Logarithmorum ope geocentricarum distantiarum, qui occurrunt in *Ephemeridibus planetarum* Schumacheri, valores axis majoris in distantia media = 9,53877 reducentes, nanciscimur:

1°.	40″,11	differentia	medii	— 0″,11
2°.	40 ,21	»	»	— 0 ,01
3°.	40 ,30	»	»	+ 0 ,08
4°.	40 ,14	»	»	— 0 ,08
5°.	40 ,02	»	»	— 0 ,20
6°.	40 ,51	»	»	+ 0 ,29
Medium	40 ,215 (3).			

(1) Vid. *Königsb. Arch.*, 2tes Stuck. pag. 126.

(2) *Astron. Nachr.* V Band, N°. 97. pag. 7.

(3) Postea Struve (Conf. *Astr. Nachr.*, N°. 139. pag. 392.) vitium detexit, quod origi-

Probabile vitium unicuique diei ex 24 observationibus definitum, est = 0″,133, unde cuique ceterarum quod ad earum medium attinet, sequitur = 0″,054, ut et quod originem habet in cochlea micrometri, quodque 0″,009 continet; ita ut probabile vitium, quod exinde majoris axis ratione profluat 0″,024 contineat, probabileque vitium ex his ambabus causis ortum, est = 0″,059.

Ex hisce ergo datis valoribus axis majoris minorisque annuli, STRUVE longitudinem adscendentis nodi annuli, secundum BESSELII definitionem = 167° 10′ (1) assumens, locosque geocentricos Saturni ex tabulis planetarum SCHUMACHERI computans, sequentes valores quod ad plani annuli ad eclipticam inclinationem, invenit:

		Differentia medii.
1°.	N = 28° 25′,6	+ 19′,7
2°.	= 28 9,1	+ 3,2
3°.	= 27 43,3	− 22,6
4°.	= 27 31,9	− 34,0
5°.	= 28 27,4	+ 21,5
6°.	= 28 18,0	+ 12,1

medium = 28° 5′,9 cum probabilissimo vitio 6′,4.

Ex differentiis sequitur probabile vitium unicae definitionis in uno die = 15′,73.

Ex supra repertis probabilibus vitiis majoris et minoris axis, scilicet 0″,133, illud simplicis definitionis inclinationis = 13′,96 sequeretur ita ut inclinationes fere tam accurate inter se conveniant, quoad probabiles observationum axium errores permittunt.

Illa inclinatio 28° 5′,9 computata est suppositione, crassitudinem annuli = 0 esse. Quod, ut STRUVE animadvertit, non plane assumere possumus, quia illa telescopio HERSCHELII nunquam disparebat.

Ponentes annuli crassitudinem = 0″,a, cumque a sint partes decimae minutarum secundarum, tunc est inclinatio

$$N = 28° 5',9 - 8',46a.$$

SCHRÖTER, observata umbra disparentis annuli, hujus crassitudinem continere statuit 0″,125; unde tunc sequeretur

---

nem in eo habebat, quod nimis magnum sumserat circuitum micrometri cochleae, quod vitium suam efficaciam in omnes factas dimensiones exercet, ita ut axis medius major, loco 40″,215 poni debeat 40″,095.

(1) Vid. pag. 58.

$$N = 27^{\circ}55',3 - 8',46\,\Delta\alpha$$

designante $\Delta\alpha$ correctionem crassitudinis a SCHRÖTERO assumtae, in partibus decimis secundarum.

§. 20.

Altera BESSELII *methodus* (1).

Sicut HUGENIUS plani annuli inclinationem definiebat, angulo, qui annuli axem majorem cum aequatore efficiebat; eodem modo BESSEL anno 1818 observationum fecit seriem, quae anguli dimensione nituntur, quae efficit annuli axem minorem cum circulo declinationis.

Ad has dimensiones adhibebat idem instrumentum aequatoriale Dollondicum, quo anno 1811 usus fuerat, cui tubum suum 16 pollicum affixerat. In ejus fortissimo oculari filum expansum erat, quod in instrumenti circa ejus varios axes rotatione tali modo movebatur, ut parallelum cum linea annuli fieret. Angulus quem magnus circulus in filum perpendiculariter erectum cum circulo verticali format, designabat per q, quemque positivum assumebat, quando hic magnus circulus a sinistra apud zenith transibat, qui ergo per indicem nonii instrumenti definiebatur; quumque ille aequalis angulo esset, quem axis minor annuli cum circulo verticali facit, exinde computari potest hujus axis angulus cum circulo declinationis.

Sequenti modo observationes instituebat: Instrumenti circulum declinationis perpendiculariter in ejus meridianum ponebat, eodem modo ac si illud ad stellam quamdam dirigiretur, cujus angulus horarius $= 90^{\circ}$ est; deinde axem instrumenti polarem tamdiu movebat, donec hic paralleliter currebat, cum filo lineae annularis atque decerpebat indicem nonii in axi polari $= u$, denotante u altitudinem supra horizontem, secundum quem hic axis directus erat. Deinceps observabat situm u' axis polaris, per quem filum paralleliter fiebat cum horizonte; accidebat illud interdiu terrestri objecto in horizonte sito, supra quod movebatur filum instrumenti rotatione circum axem verticalem. Quando igitur significamus fili angulum tubi positi in angulo horario 90 graduum cum axi polari per c quandoque altitudines u et u' in latere sinistro zenith minorem quam 90°, et in latere dextro majorem quam 90° numeramus, tunc nobis est

$$\sin.\,(q - c + 90^{\circ}) : \sin.\,(90^{\circ} - u) = 1 : \sin.\,z$$

---

(1) BODE, *Astr. Jahrb. für das Jahr* 1829. pag. 175 seqq.

in quo z distantiam zenithalem planetae significat; porro

$$c = u'$$

ergo

$$\sin. z \cos. (u' - q) = \cos. u.$$

Notemus parallacticum planetae angulum per q', angulumque quem format axis minor ellipseos annuli cum circulo declinationis, positivum sumtum, quando pars borealis axis minoris ad orientem circuli declinationis discedit, per p, tunc est:

$$p = q + q', \quad \text{vel } q = p - q'$$

habemusque, ad inveniendum p, sequentem aequationem

$$\cos. (u' - p + q') = \frac{\cos. u}{\sin. z}$$

cujus z et q' cognitis formulis

$$\sin. z \sin. q' = \cos. \phi \sin. t$$

$$\sin. z \cos. q' = \sin. \phi \cos. \delta - \cos. \phi \sin. \delta \cos. t;$$

inveniuntur, in quibus ϕ altitudinem poli, δ declinationem et t angulum horarium occidentalem significant.

Hoc modo Bessel has observationes fecit constituitque:

1818.	Tempus Sidereum.	u	u'	p	
Aug. 13	20h 24' 36"	61° 58'	89° 11'	+ 4° 37',2	
	30 36	62 12	»	5 8,2	
	50 36	65 5	»	4 42,8	4° 46',0
	59 36	66 21	»	4 55,5	
20	20 21 0	58 18	85 8	4 15,6	
	26 0	58 56	»	4 13,6	
	32 0	58 30	»	5 30,0	4 42,2
	35 30	59 29	»	4 54,3	
	38 30	60 7	»	4 37,7	
26	20 23 9	62 15	90 0	5 21,6	
	30 25	62 14,5	»	6 18,7	5 52,6
	21 17 29	69 8	»	5 24,7	
	2 345	69 4	»	6 25,4	
31	20 3 55	58 19	88 45,5	6 4,8	
	14 15	60 24	»	5 8,2	
	17 7	61 37	»	4 27,0	5 40,7
	26 3	60 14	»	6 49,8	
	29 15	61 32,5	»	5 50,6	
	35 7	62 22	»	5 44,1	

1818.	Tempus Sidereum.	u	u′	p	
Sept	23h 25′ 35″	87° 1′,5	88° 44′	+ 4° 43′,0	
	32 23	87 34	»	5 12,3	
	34 29	87 35,5	»	5 30,8	5° 4′,6
	37 19	88 34	»	4 52,4	
	41 13	88 57	»	5 4,5	
2	23 26 51	87 0,5	88 44′	4 58,8	
	29 47	87 1,5	»	5 26,2	
	31 45	86 28,5	»	6 21,8	5 18,0
	34 55	87 21	»	5 53,8	
	38 43	89 20	»	4 16,6	
	40 47	89 7,5	»	4 50,5	
13	23 24 2	86 32	88 44	5 6,1	
	26 30	86 35,5	»	5 26,2	
	31 24	87 9,5	»	5 35,1	5 36,0
	36 2	87 44,5	»	5 40,6	
	39 2	87 37	»	6 17,9	
	41 58	88 45	»	5 29,8	
8	25 29 46	87 30	88 44	5 9,6	
	33 50	87 15	»	6 5,6	
	36 50	87 52	»	6 5,9	5 40,3
	40 42	88 36,5	»	5 40,0	
	45 26	89 23	»	5 33,2	
20	23 29 50	87 20	88 44	5 52,3	
	31 46	88 10	»	5 14,9	
	34 6	87 24	»	5 28,7	5 50,3
	38 52	88 23	»	6 8,2	
	41 6	88 25	»	6 27,2	
25	23 27 5	89 21	91 26	6 5,0	
	30 25	89 40	»	6 15,9	
	35 21	89 31	»	7 18,1	6 38,9
	37 25	90 41	»	6 4,7	
	39 57	90 4	»	7 20,0	
	41 41	90 41,5	»	6 54,7	
26	23 28 50	88 58	91 26	6 49,9	
	31 38	89 53	»	6 15,3	
	45 10	90 43	»	7 28,4	6 47,0
	46 24	91 24	»	6 54,4	
	48 20	91 55	»	6 38,1	
	51 2	92 20	»	6 35,8	

1818.	Tempus Sidereum.	κ	κ'	p	
Sept. 27	23h 27′ 54″	89° 36′	91° 26′	+ 6° 0′,9	
	30 6	90 17	»	6 36,3	
	33 32	90 15	»	6 11,4	6° 23′,1
	35 38	90 20	»	6 25,9	
	37 28	90 17,5	»	6 46,2	
	51 38	91 18,5	»	6 17,7	
29	23 30 24	90 3	90 32	5 4,4	
	32 20	89 34	»	5 56,3	5 44,9
	35 20	90 20	»	5 33,7	
	38 32	90 1	»	6 25,3	
30	23 24 49	88 50	90 32	5 35,8	
	26 33	88 31	»	6 13,6	
	29 29	88 57	»	6 12,7	6 13,9
	32 41	88 22	»	7 22,4	
	35 37	89 56	»	6 5,5	
	38 17	90 23	»	5 53,3	
Octob. 1	23 17 48	88 23,5	90 32	5 0,2	
	20 22	88 0	»	5 51,2	
	23 2	88 23	»	5 51,1	
	24 52	89 25	»	4 59,5	5 23,3
	28 18	89 55	»	4 58,9	
	33 38	90 5	»	5 38,8	
3	23 25 13	89 1	90 32	5 34,2	
	27 9	89 21	»	5 30,4	
	29 1	89 57	»	5 8,0	
	30 29	90 13	»	5 4,3	5 20,8
	33 47	90 45	»	5 0,0	
	35 55	90 20,5	»	5 47,8	
7	23 30 17	83 47,5	84 4	5 52,8	
	33 33	83 34	»	6 38,7	
	37 47	84 21	»	6 17,6	6 19,2
	39 29	84 45	»	6 15,4	
	44 55	85 16	»	6 31,7	
8	23 33 20	102 7	103 13	5 7,0	
	36 16	101 54	»	5 49,9	
	39 52	103 35	»	6 45,8	5 41,1
	44 4	102 47	»	5 56,3	
	46 50	104 4	»	4 56,8	
	50 28	104 5	»	5 30,7	

1818	Tempus Sidereum.	u	u'	p	
Octob. 16	19h 25′ 14″	69° 41′	103° 18′	+ 5° 46′,7	
	51 18	72 18	»	5 45,7	
	54 56	72 57	»	5 29,1	5° 39′,8
	57 36	73 17	»	5 36,6	
	20 1 20	73 17	»	5 51,2	
	4 40	74 0	»	5 29,6	
17	19 22 17	80 40	113 0	4 2,8	
	24 37	80 40	»	4 15,4	
	26 19	81 21	»	3 42,7	4 15,4
	30 41	81 5	»	4 23,4	
	34 13	80 56	»	4 52,8	
17	20 29 13	109 41	113 0	6 2,5	
	31 15	109 56	»	6 5,6	
	33 35	111 43	»	4 27,4	5 32,0
	36 7	110 57	»	5 44,2	
	38 45	111 47	»	5 13,6	
	40 31	111 40	»	5 38,7	
18	19 16 2	79 21	113 0	4 51,5	
	18 42	79 21	»	5 5,4	
	20 38	78 23	»	6 15,1	5 30,4
	23 8	79 7	»	5 43,6	
	25 6	79 30	»	5 36,4	

§. 21.

Quando ex his observatis angulis p axis minoris ellipseos annuli cum circulo declinationis, plani annuli inclinationem deducere volumus, cognoscendus nobis erit nodorum annuli locus in Saturni orbita, quippe qui ex annuli disparitionibus immediate inveniri possunt, dum longitudinem nodorum in ecliptica non definire possumus, inclinatione nondum cognita.

Nam eo momento, quo annuli planum per solem transit, Saturnus adest in communi intersectione plani orbitae suae et plani annuli, quod per solem transit; nodi ergo adscendentis longitudo in Saturni orbita aequalis est longitudini Saturni heliocentricae in orbita sua, ita ut nodorum annuli locus in orbita Saturni immediate talibus possit definiri observationibus.

Idem hoc valet, quando per terrae centrum annuli planum transit, quum ita, quia annuli planum constanter parallelum sibi manet, nodi longitudo helio-

centrica in Saturni orbita aequalis sit Saturni in sua orbita geocentricae longitudini.

Sit enim in figura apposita ♈D ecliptica, ♈′C Saturni orbita, BC annuli planum; tunc observationum ope, annuli plano per solem transeunte, puncti C locus in Saturni orbita definiri potest, ubi Saturnus adsit, annuli plano per solem transeunte, atque ita nodi locus sit; quia punctum B locus nodi in ecliptica non definiri potest, quoniam inclinatio CB ad AD sive inclinatio annuli ad eclipticam adhuc incognita est.

Quando ergo locus puncti C cognitus aut observatus est, eo tempore, quo annuli planum per solem transit; subtrahatur hinc ♈A = ♈′A longitudo heliocentrica nodi orbitae Saturni habemusque arcum AC; etiam angulus A datus est, qui est inclinatio orbitae Saturni ad eclipticam.

Atque in annuli disparitione, quippe quod ejus planum per terrae centrum transit, subtrahatur longitudo heliocentrica nodi orbitae Saturni a geocentrica Saturni in sua orbita longitudine, habemusque iterum longitudinem arcus AC.

Itaque nobis in triangulo ABC duntaxat duae quantitates cognitae sunt, nempe AC = ♈′C — ♈A atque angulus A. Ut ergo latus AB definiamus, quo nanciscamur nodi longitudinem plani annuli ♈B in ecliptica, huic rei inserviat angulus p, angulus qui annuli axem minorem cum circulo declinationis efficit, et quem Besselii observationes praebent.

Si nunc locus nodorum plani annuli in plano aequatoris terrae datum esset, horum duorum planorum inclinatio facile posset definiri. Quando enim proponitur longitudo nodi plani annuli in aequatore per N inclinatioque hujus plani ad planum aequatoris per I, terrae latitudo supra annuli planum e Saturno visum per l, angulus borealis partis axis minoris annuli cum circulo declinationis per p, atque adscensio recta declinatioque Saturni per α et δ, tunc in figura apposita, in qua AB aequatorem et P ejus polum, NC planum annuli atque R polum hujus plani, N locum nodi annuli in aequatore et T locum terrae e Saturno visum, significat; tunc nobis est:

RPN $= 90^\circ$,

NPT = adscensioni rectae puncti T e Saturno visi — adscensioni rectae puncti N $= \alpha - 180^\circ - N$,

RPT $= 90^\circ + \alpha - 180^\circ - N = \alpha - N - 90^\circ$,

PTR $= p$,

PT $= 90^\circ + \delta$,

PR $= I$,

RT $= 90^\circ - l$.

atque triangulus sphaericus RPT praebet

$$sin.\,RT\; sin.\,PTR = sin.\,PR\; sin.\,RPT.$$
$$cos.\,RT\; cos.\,PTR = -\,sin.\,PR\; cos.\,RPT\; cos.\,PT + cos.\,PR\; sin.\,PT$$
$$cos.\,RT = sin.\,PR\; cos.\,RPT\; sin.\,PT + cos.\,PR\; cos.\,PT.$$

quae aequationes praebent, per substitutionem valorum superiorum,

$$cos.\,l\; sin.\,p = -\,sin.\,I\; cos.\,(\alpha - N)$$
$$cos.\,l\; cos.\,p = sin.\,I\; sin.\,(\alpha - N)\; sin.\,\delta + cos.\,I\; cos.\,\delta$$
$$sin.\,l = sin.\,I\; cos.\,(\alpha - N)\; cos.\,\delta - cos.\,I\; sin.\,\delta$$

ex duabus prioribus aequationibus *cos.* E eliminantes, habemus

$$-\frac{sin.\,I\; cos.\,(\alpha - N)}{sin.\,p} = \frac{sin.\,I\; cos.\,(\alpha - N)\; sin.\,\delta + cos.\,I\; cos.\,\delta}{cos.\,p}$$

unde sequitur

$$0 = sin.\,I\; cos.\,(\alpha - N)\; cos.\,p + sin.\,I\; sin.\,(\alpha - N)\; sin.\,\delta\; sin.\,p + cos.\,I\; cos.\,\delta\; sin.\,p$$

Accipit haec aequatio formam simpliciorem, quando angulos auxiliares a et A inferimus, qui sic definiti sunt

$$cos.\,a\; cos.\,A = cos.\,p$$
$$cos.\,a\; sin.\,A = sin.\,p\; sin.\,\delta$$
$$sin.\,a = sin.\,p\; cos.\,\delta$$

fitque illa ergo

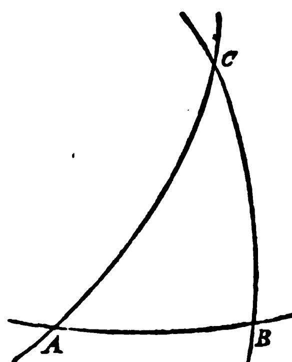
$$0 = sin.\,I\; cos.\,(\alpha - N)\; cos.\,a\; cos.\,A + sin.\,I\; sin.\,(\alpha - N)\; cos.\,a\; sin.\,A + cos.\,I\; sin.\,a$$
$$0 = sin.\,I\; cos.\,a\; cos.\,(N + A - \alpha) + cos.\,I\; sin.\,a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Sint longitudo nodorum atque inclinatio Saturni orbitae in aequatore $= n$ et i.

Longitudo nodorum atque inclinatio aequatoris in Saturni orbita $= n'$ et i.

Longitudo nodorum plani annuli et inclinatio in Saturni orbita $= n''$ et i'.

Possumus ergo N et I in aequatione (1) per n, n', i, n'', i' exprimere, tres harum quantitatum priores propter cognitam positionem orbitae Saturni respectu eclipticae atque propter obliquitatem eclipticae notae sunt, quarta data est per annuli disparitiones, quintaque est quantitas ignota quaestionis.



In Figura apposita, AC aequatoris planum representat, BC annuli planum, AB idem orbitae Saturni; nobisque est;

$$\begin{aligned} AC &= N - n - 180^\circ, \\ AB &= n'' - n, \\ ABC &= 180^\circ - i', \\ ACB &= I, \\ BAC &= i. \end{aligned}$$

Triangulus sphaericus ABC praebet itaque

$$\begin{aligned} \sin. ACB \,\sin. AC &= \sin. ABC \,\sin. AB \\ \sin. ACB \,\cos. AC &= \sin. ABC \,\cos. BAC \,\cos. AB + \cos. ABC \,\sin. BAC \\ \cos. ACB &= \sin. ABC \,\sin. BAC \,\cos. AB - \cos. ABC \,\cos. BAC. \end{aligned}$$

nobisque ergo est

$$\left.\begin{aligned} \sin. I \,\sin.(N - n) &= -\sin. i' \,\sin.(n'' - n') \\ \sin. I \,\cos.(N - n) &= -\sin. i' \,\cos. i \,\cos.(n'' - n') + \cos. i' \,\sin. i \\ \cos. I &= \quad \sin. i' \,\sin. i \,\cos.(n'' - n') + \cos. i' \,\cos. i \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

quando in aequatione

$$0 = \sin. I \,\cos. a \,\cos.(N + A - a) + \cos. I \,\sin. a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

loco $\cos.(N + A - a)$ ejus similem valorem, vel

$$\begin{aligned} \cos.(n + A - a) &= \cos.(N - n + n - a + A) \\ &= \cos.(N - n) \,\cos.(n - a + A) - \sin.(N - n) \,\sin.(n - a + A) \end{aligned}$$

substituimus, habemus

$$\begin{aligned} 0 = &\cos.(N - n) \,\sin. I \,\cos. a \,\cos.(n - a + A) \\ &- \sin.(N - n) \,\sin. I \,\cos. a \,\sin.(n - a + A) \\ &+ \cos. I \,\sin. a. \end{aligned}$$

In eo substituentes valores $\sin. I \,\cos.(N - n)$, $\sin. I \,\sin.(N - n)$ et $\cos. I$ ex aequationibus (2), nobis est

$$\begin{aligned} 0 = &- \sin. i' \,\cos. i \,\cos.(n'' - n') \,\cos. a \,\cos.(n - a + A) + \cos. i' \,\sin. i \,\cos. a \,\cos.(n - a + A) \\ &+ \sin. i' \,\sin.(n'' - n') \,\cos. a \,\sin.(n - a + A) \\ &+ \sin. i' \,\sin. i \,\cos.(n'' - n') \,\sin. a + \cos. i' \,\cos. i \,\sin. a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = &\sin. i' \,[\cos. a \,\sin.(n - a + A) \,\sin.(n'' - n') - \cos. a \,\cos.(n - a + A) \,\cos.(n'' - n') \,\cos. i \\ &+ \sin. a \,\cos.(n'' - n') \,\sin. i] \\ &+ \cos. i' \,[\cos. a \,\cos.(n - a + A) \,\sin. i + \sin. a \,\cos. i] \end{aligned}$$

hanc formulam per $\cos. a \,\cos.(n - a + A)$ dividentes, habemus

$$\begin{aligned} 0 = &\sin. i' \left[\text{tang.}(n - a + A) \,\sin.(n'' - n') - \cos.(n'' - n') \,\cos. i + \frac{\text{tang.}\, a \,\cos.(n'' - n') \,\sin. i}{\cos.(n - a + A)}\right] \\ &+ \cos. i' \left[\sin. i + \frac{\text{tang.}\, a \,\cos. i}{\cos.(n - a + A)}\right] \end{aligned}$$

$\frac{tang.\, a}{cos.\,(n-a+A}$ = *tang.* B ponentes, nanciscimur

$$0 = sin.\, i' \,[tang.\,(n-a+A)\, sin.\,(n''-n') - cos.\,(n''-n')\, cos.\, i + tang.\, B\, cos.\,(n''-n')\, sin.\, i] + cos.\, i'\, [sin.\, i + tang.\, B\, cos.\, i]$$

hanc aequationem per *cos.* B multiplicantes, habemus

$$0 = sin.\, i'\, [tang.\,(n-a+A)\, cos.\, B\, sin.\,(n''-n') - cos.\, B\, cos.\,(n''-n')\, cos.\, i + sin.\, B\, cos.\,(n''-n')\, sin.\, i] + cos.\, i'\, [cos.\, B\, sin.\, i + sin.\, B\, cos.\, i]$$

$$0 = sin.\, i'\, [tang.\,(n-a+A)\, cos.\, B\, sin.\,(n''-n') - cos.\,(B+i)\, cos.\,(n''-n')] + cos.\, i'\, sin.\,(B+i),$$

per *cos.* (B + *i*) dividentes, nobis est

$$0 = sin.\, i' \left[\frac{tang.\,(n-a+A)\, cos.\, B\, sin.\,(n''-n')}{cos.\,(B+i)} - cos.\,(n''-n')\right] + cos.\, i'\, tang.\,(B+i),$$

$tang.\,(n-a+A) . \frac{cos.\, B}{cos.\,(B+i)} = tang.\, C$ ponentes, adest

$$0 = sin.\, i'\, [sin.\,(n''-n')\, tang.\, C - cos.\,(n''-n')] + cos.\, i'\, tang.\,(B+i)$$

$$0 = sin.\, i' \left[\frac{sin.\,(n''-n')\, sin.\, C - cos.\,(n''-n')\, cos.\, C}{cos.\, C}\right] + cos.\, i'\, tang.\,(B+i)$$

$$0 = -\, sin.\, i' . \frac{cos.\,(n''-n'+C)}{cos.\, C} + cos.\, i'\, tang.\,(B+i)$$

unde sequitur

$$tang.\, i' = \frac{tang.\,(B+i)\, cos.\, C}{cos.\,(n''-n'+C)}$$

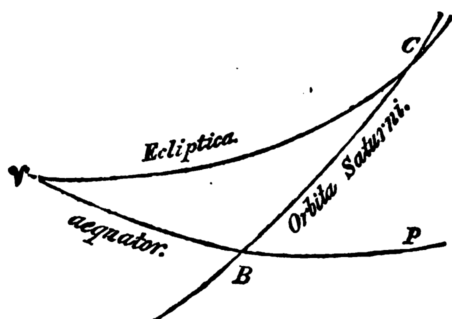
ut ergo *i'* ex *p* inveniamus, computenda est sequentes formulae:

$$cos.\, a\, cos.\, A = cos.\, p$$
$$cos.\, a\, sin.\, A = sin.\, p\, sin.\, \delta$$
$$sin.\, a = sin.\, p.\, cos.\, \delta$$
$$tang.\, B = \frac{tang.\, a}{cos.\,(n-a+A)}$$
$$tang.\, C = tang.\,(n-a+A)\, \frac{cos.\, B}{cos.\,(B+i)}$$
$$tang.\, i' = tang.\,(B+i) . \frac{cos.\, C}{cos.\,(n''-n'+C)}$$

§. 22.

Ponatur:

Orbitae Saturni ad eclipticam inclinatio = 2° 29′ 47″,0 — 0″, 08 ($t - 1800$)
Adscendentis nodi longitudo . . . . = 111 56 40 ,0 + 31 , 55 ($t - 1800$)
Obliquitas eclipticae . . . . = 23 27 54 ,8 — 0 ,477 ($t - 1800$)



sit in *Figura* apposita:
♈C Ecliptica,
♈B Aequator,
et BC Orbita Saturni.
ergo est:

♈CB = Inclinationi orbitae Saturni ad eclipticam.
♈C = Longitudini adscendentis nodi orbitae Saturni in ecliptica.
C♈B = ω = Obliquitiati sive inclinationi eclipticae in aequatore.
CBP = i = Inclinationi orbitae Saturni in aequatore.
♈B = n = Longitudini nodi orbitae Saturni in aequatore.
180° + ♈C − BC = n' = Longitudini nodi aequatoris in Saturni orbita.

ut i, n et n' inveniatur, has tres aequationes habemus:

$$\cos. \text{♈BC} = -\cos. \text{C♈B} \cos. \text{♈CB} + \sin. \text{C♈B} \sin. \text{♈CB} \cos. \text{♈C}$$

$$\cos. \text{♈B} = \frac{\cos. \text{♈CB} + \cos. \text{C♈B} \cos. \text{♈BC},}{\sin. \text{C♈B} \sin. \text{♈BC}}$$

$$\cos. \text{BC} = \frac{\cos. \text{B♈C} + \cos. \text{♈BC} \cos. \text{♈CB}}{\sin. \text{♈BC} \sin. \text{♈CB}}$$

atque ergo

$$\cos. i = \cos. \omega \cos. \text{♈CB} - \sin. \omega \sin. \text{♈CB} \cos. \text{♈C}$$

$$\cos. n = \frac{\cos. \text{♈CB} - \cos \omega \cos. i}{\sin. \omega \sin. i}$$

$$\cos. \text{BC} = \frac{\cos. \omega - \cos. i \cos. \text{♈CB}}{\sin. i \sin. \text{♈CB}}$$

ut logarithmos facilius adhibere possimus, formulas praecedentes hoc modo reducamus:

$$\cos. i = \cos. \omega \cos. \text{♈CB} - \sin. \omega \sin. \text{♈CB} \cos. \text{♈C}$$

$$= \cos. \omega (\cos. \text{♈CB} - \tang. \omega \sin. \text{♈CB} \cos. \text{♈C})$$

$\tang. \psi = \tang. \omega \cos. \text{♈C}$ ponentes, habemus

$$\cos. i = \cos. \omega (\cos. \text{♈CB} - \tang. \psi \sin. \text{♈CB}$$

$$= \frac{\cos. \omega (\cos. \text{♈CB} \cos. \psi - \sin. \text{♈CB} \sin. \psi}{\cos. \psi}$$

$$= \frac{\cos. \omega \cos. (\psi + \text{♈CB})}{\cos. \psi};$$

$$\cos. n = \frac{\cos. \Upsilon CB - \cos. \omega \cos. i}{\sin. \omega \sin. i}$$

$$1 - \cos n = 1 - \frac{\cos. \Upsilon CB - \cos. \omega \cos. i}{\sin. \omega \sin. i} = \frac{\sin. \omega \sin. i - \cos \Upsilon CB + \cos. \omega \cos i}{\sin. \omega \sin. i}.$$

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} n = \frac{\cos. (\omega - i) - \cos. \Upsilon CB}{\sin. \omega \sin. i} = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}(\Upsilon CB + \omega - i) \sin. \frac{1}{2}(\Upsilon CB - \omega + i)}{\sin. \omega \sin. i}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} n = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(\Upsilon CB + \omega - i) \sin. \frac{1}{2}(\Upsilon CB - \omega + i).}{\sin. \omega \sin. i}}$$

$$\cos. BC = \frac{\cos. \omega - \cos. i \cos. \Upsilon CB}{\sin. i \sin. \Upsilon CB}$$

$$1 - \cos. BC = 1 - \frac{\cos. \omega - \cos. i \cos. \Upsilon CB}{\sin. i \sin. \Upsilon CB} = \frac{\sin. i \sin. \Upsilon CB - \cos. \omega + \cos. i \cos. \Upsilon CB}{\sin. i \sin. \Upsilon CB}$$

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} BC = \frac{\cos. (i - \Upsilon CB) - \cos. \omega}{\sin. i \sin. \Upsilon CB} = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}(\omega + i - \Upsilon CB) \sin. \frac{1}{2}(\omega - i + \Upsilon CB)}{\sin. i \sin \Upsilon CB}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} BC = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(\omega + i - \Upsilon CB) \sin. \frac{1}{2}(\omega - i + \Upsilon CB)}{\sin. i \sin. \Upsilon CB}}.$$

ut ergo i, n et n' inveniantur, adsunt sequentes formulae:

$$\left.\begin{aligned} \tan g. \psi &= \tan g. \omega \cos. \Upsilon C \\ \cos. i &= \frac{\cos. \omega \cos. (\psi + \Upsilon CB)}{\cos. \psi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} n = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(\Upsilon CB + \omega - i) \sin. \frac{1}{2}(\Upsilon CB - \omega + i)}{\sin. \omega \sin. i}} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin. \tfrac{1}{2} BC &= \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(\omega + i - \Upsilon CB) \sin. \frac{1}{2}(\omega - i + \Upsilon CB)}{\sin. i \sin. \Upsilon CB}} \\ n' &= 180^\circ + \Upsilon C - BC \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Jam pro anno 1800 habemus

$$\Upsilon CB = 2^\circ 29' 47'',0$$
$$\Upsilon C = 111 \; 56 \; 40 \,,8$$
$$C \Upsilon B = \omega = 23 \; 27 \; 54 \,,8$$

$$Log. \tan g. \omega = Log. \tan g. \; 23^\circ 27' 54',8 = 9.6375806$$
$$Log. \cos. \Upsilon C = Log. \cos. \; 111 \; 56 \; 40 \,,0 = 9.5725317 \text{ n.}$$

$$Log. \tan g. \psi = 9.2101123 \text{ n.}$$
$$\psi = 170^\circ 47' 8'',1$$

Log. cos. ω = *Log. cos.* 23°27′54″,8 = 9.9625123
Log. cos. (ψ + ♈CB) = *Log. cos.* 173 16 55 ,1 = 9.9970078 n.

9 9595201 n.
Log. cos. ψ = *Log. cos.* 170 47 8,1 = 9.9943594 n.

Log. cos. i = 9.9651607
i = 22°38′39″,5

Log. sin. ω = *Log. sin.* 23°27′54″,8 = 9.6000929
Log. sin i = *Log. sin.* 22 38 39 ,5 = 9.5855710

Log. sin. ω *sin.* i = 9 1855639

Log. sin. $\frac{1}{2}$(♈CB + ω − i) = *Log. sin.* 1°39′31″,1 = 8.4615686
Log. sin. $\frac{1}{2}$(♈CB − ω + i) = *Log. sin.* 0 50 15 ,9 = 8.1649763

6 6265449
Log. sin. ω *sin.* i = 9.1855639

7.4409810
2) ―――
Log. sin. $\frac{1}{2}n$ = 8.7204905
$\frac{1}{2}n$ = 3° 0′ 42″,1
n = 6° 1′ 24″,2

Log. sin. i = *Log. sin.* 22°38′39″,5 = 9.5854710
Log. sin. ♈CB = *Log. sin.* 2 29 47 ,0 = 8.6390522

Log. sin. i *sin.* ♈CB = 8.2245232

Log. sin. $\frac{1}{2}$(ω + i − ♈CB) = *Log. sin.* 21°48′23″,6 = 9 5699285
Log. sin. $\frac{1}{2}$(ω − i + ♈CB) = *Log. sin.* 1 39 31 ,2 = 8.4615758

8.0315043
Log. sin. i *sin.* ♈CB = 8.2245232

9.8069811
2) ―――
Log. sin. $\frac{1}{2}$BC = 9.9034905
$\frac{1}{2}$BC = 53° 12′ 2″,3
BC = 106 24 4 ,6
♈C = 111 56 40 ,0
♈C − BC = 5 32 35 ,4
n' = 185° 32′ 35″,4

Pro anno 1900 habemus

♈CB = 2° 29′ 39″,0
♈C = 112 49 15 ,0
C♈B = ω = 23 27 7 ,1

$Log.\ tang.\ \omega = Log.\ tang.\ 23^\circ 27'\ 7'',1 = 9.6373056$

$Log.\ cos.\ \Upsilon C = Log.\ cos.\ 112\ 49\ 15\ ,1 = 9.5886652\ n.$

$Log.\ tang.\ \psi = 9.2259708\ n.$

$\psi = 170^\circ 26'\ 56'',8$

$Log.\ cos.\ \omega = Log.\ cos.\ 23^\circ 27'\ 7'',1 = 9.9625559$

$Log.\ cos.\ (\psi + \Upsilon CB) = Log.\ cos.\ 172\ 56\ 35\ ,8 = 9.9966977\ n.$

$9.9592536\ n.$

$Log.\ cos.\ \psi = Log.\ cos.\ 170\ 26\ 56\ ,8 = 9.9939380\ n.$

$Log.\ cos.\ i = 9.9653156$

$i = 22^\circ 35'\ 42'',8$

$Log.\ sin.\ \omega = Log.\ sin.\ 23^\circ 27'\ 7'',1 = 9.5998615$

$Log.\ sin.\ i = Log.\ sin.\ 22\ 35\ 42\ ,8 = 9.5845781$

$Log.\ sin.\ \omega\ sin.\ i = 9.1844396$

$Log.\ sin.\ \tfrac{1}{2}(\Upsilon CB + \omega - i) = Log.\ sin.\ 1^\circ 40'\ 31'',6 = 8.4659455$

$Log.\ sin.\ \tfrac{1}{2}(\Upsilon CB - \omega + i) = Log.\ sin.\ 0\ 49\ 7\ ,4 = 8.1549992$

6.6209447

$Log.\ sin.\ \omega\ sin.\ i = 9.1844396$

7.4365051

$2)$

$Log.\ sin.\ \tfrac{1}{2} n = 8.7182525$

$\tfrac{1}{2} n = 2^\circ 59'\ 46'',4$

$n = 5\ 59\ 32\ ,8$

$Log.\ sin.\ i = Log.\ sin.\ 22^\circ 35'\ 42'',8 = 9.5845781$

$Log.\ sin.\ \Upsilon CB = Log.\ sin.\ 2\ 29\ 39\ ,0 = 8.6386657$

$Log.\ sin.\ i\ sin.\ \Upsilon CB = 8.2232438$

$Log.\ sin.\ \tfrac{1}{2}(\omega + i - \Upsilon CB) = Log.\ sin.\ 21^\circ 46'\ 35'',4 = 9.5693587$

$Log.\ sin.\ \tfrac{1}{2}(\omega - i + \Upsilon CB) = Log.\ sin.\ 1\ 40\ 31\ ,7 = 8.4659527$

8.0353114

$Log.\ sin.\ i\ sin.\ \Upsilon CB = 8.2232438$

9.8120676

$2)$

$Log.\ sin.\ \tfrac{1}{2} BC = 9.9060338$

$\tfrac{1}{2} BC = 53^\circ 39'\ 10'',4$

$BC = 107\ 18\ 20\ ,8$

$\Upsilon C = 112\ 49\ 15\ ,0$

$\Upsilon C - BC = 5\ 30\ 54\ ,2$

$n' = 185^\circ 30'\ 54'',2$

Pro anno 1800 est $n' = 185^\circ\,32'\,35'',4$
» » 1900 » $n' = 185\;\;30\;\;54\;,2$

$-\;\;1'\,41'',2 = -\,101'',2$ in 100 annos et $-\,1''012$ in singulum annum;

pro anno 1800 est $n = 6^\circ\;\;1'\,24'',2$
» » 1900 » $n = 5\;\;59\;\;32\;,8$

$-\;\;1'\,51'',4 = -\,111'',4$ in 100 annos et $-\,1{,}114$ in singulum annum;

pro anno 1800 est $i = 22^\circ\,38'\,39'',5$
» » 1900 » $i = 22\;\;35\;\;42\;,8$

$-\;\;2'\,56'',7 = -\,176'',7$ in 100 annos et $-\,1{,}767$ in singulum annum;

ergo

$$
\begin{aligned}
n' &= 185^\circ\,32'\,35'',4 - 1'',012\,(t - 1800),\\
n' &= \;\;6\;\;\;1\;\;24\;,2 - 1\;,114\,(t - 1800),\\
i &= \;22\;\;38\;\;39\;,5 - 1\;,767\,(t - 1800);
\end{aligned}
$$

habemus adhuc secundum Bessel; vid. *Königsberger Archiv für Natur-Wissenschaft und Mathematik*, II Stück, pag. 130.

$$n'' = 170^\circ\,49'\,54'' \;+ 41'',00\;\;(t - 1800),$$

et igitur $\quad n'' - n' = 345\;\;17\;\;18\;,6 + 42\;,012\;(t - 1800)$.

Illas valores in formulis

$$
\begin{aligned}
\textit{tang.}\,A &= \textit{tang.}\,p\;\;\textit{sin.}\,\delta\\
\textit{sin.}\,a &= \textit{sin.}\,p\;\;\textit{cos.}\,\delta\\
\textit{tang.}\,B &= \frac{\textit{tang.}\,a}{\textit{cos.}\,(n - a + A)}\\
\textit{tang.}\,C &= \textit{tang}\;\;(n - a + A)\,\frac{\textit{cos.}\,B}{\textit{cos.}\,(B + i)}\\
\textit{tang.}\,i' &= \textit{tang.}\,(B + i)\,\frac{\textit{cos}\;\;C}{\textit{cos.}\,(n'' - n' + C)}
\end{aligned}
$$

ad basin ponentes, nanciscimur, si 13 Augusti 1818 calculemus

$$i' = 26^\circ\,20'\,6'';$$

vid. calculus sequens:

Pro anno 1818, $n = 6^\circ\ 1'\ 4'',0$

$i = 22\ 38\ 7,6$

$n'' - n' = 345\ 29\ 54,8$

$Log.\ tang.\ p = Log.\ tang.\ 4^\circ 46'\ 0'' = 8.9210957$

$Log.\ sin.\ \delta = Log.\ sin. -7\ 15\ 48 = 9.1018495$

$Log.\ tang.\ A = 8.0229452$

$A = -\ 0^\circ 36' 14'',4$

$Log.\ sin.\ p = Log.\ sin.\ 4^\circ 46'\ 0'' = 8.9195911$

$Log.\ cos.\ \delta = Log.\ cos. -7\ 15\ 48 = 9.9965009$

$Log.\ sin.\ a = 8.9160920$

$a = 4^\circ 43' 42'',0$

$Log.\ tang.\ a = Log.\ tang.\ 4^\circ 43' 42'',0 = 8.9175729$

$Log.\ cos.\ (n - a + A) = Log.\ cos.\ 17\ 14\ 25,6 = 9.9100349$

$Log.\ tang.\ B = 8.9375380$

$B = 4^\circ 56' 58'',9$

$Log.\ tang.\ (n - a + A) = Log.\ tang.\ 17^\circ 14' 25'',6 = 9.4918174$

$Log.\ cos.\ B = Log.\ cos.\ 4\ 56\ 58,9 = 9.9983774$

9.4901948

$Log.\ cos.\ (B + i) = Log.\ cos.\ 27\ 35\ 6,5 = 9.9475924$

$Log.\ tang.\ C = 9.5426024$

$C = 19^\circ 13' 47'',4$

$Log.\ tang.\ (B + i) = Log.\ tang.\ 27^\circ 35'\ 6'',5 = 9.7180506$

$Log.\ cos.\ C = Log.\ cos.\ 19\ 13\ 47,4 = 9.9750663$

9.6931169

$Log.\ cos.\ (n'' - n' + C) = Log.\ cos.\ 4\ 43\ 42,2 = 9.9985194$

$Log.\ tang.\ i' = 9.6945975$

$i' = 26^\circ 20' 6''$

Tali progrediens modo Bessel sequentes, quod ad i' valores nactus est:

1818.		a	δ	p	i'
Aug.	13	348°36′,2	— 7° 15′,8	+ 4° 46′,0	26° 20′,9
	20	348 10 ,4	— 7 27 ,3	4 42 ,2	26 15 ,4
	26	347 46 ,3	— 7 38 ,5	5 52 ,6	27 22 ,9
	31	347 25 ,7	— 7 48 ,2	5 40 ,7	27 9 ,3
Sept.	1	347 20 ,7	— 7 50 ,2	5 4 ,6	26 33 ,1
	2	347 16 ,7	— 7 52 ,9	5 18 ,0	26 47 ,2
	3	347 12 ,5	— 7 53 ,7	5 36 ,0	27 3 ,4
	8	346 51 ,5	— 8 2 ,4	5 40 ,3	27 5 ,7
	20	346 1 ,4	— 8 23 ,3	5 50 ,3	27 11 ,0
	25	345 41 ,3	— 8 31 ,8	6 38 ,9	27 59 ,9
	26	345 37 ,4	— 8 33 ,4	6 47 ,0	28 7 ,7
	27	345 33 ,5	— 8 35 ,0	6 23 ,1	27 41 ,1
	29	345 25 ,9	— 8 38 ,0	5 44 ,9	27 4 ,0
	30	345 22 ,2	— 8 39 ,6	6 13 ,9	27 33 ,0
Octob.	1	345 18 ,5	— 8 41 ,3	5 23 ,3	26 42 ,0
	3	345 11 ,3	— 8 43 ,8	5 20 ,8	26 39 ,6
	7	344 51 ,0	— 8 49 ,1	6 19 ,2	27 36 ,3
	8	344 54 ,0	— 8 50 ,3	5 41 ,1	26 57 ,6
	16	344 29 ,9	— 8 59 ,5	5 39 ,8	26 53 ,8
	17	344 27 ,2	— 9 0 ,3	4 15 ,4	25 29 ,1
	17	344 26 ,8	— 9 0 ,5	5 32 ,0	26 46 ,1
	18	344 24 ,5	— 9 1 ,2	5 30 ,4	26 44 ,3

Medium harum 22 definitionum, praebet annuli in Saturni orbita inclinationem

$$= 27° \; 0' \; 9''$$

cum probabili vitio in iis cujusque separatae definitionis

$$= \pm \; 24',1$$

illiusque medii

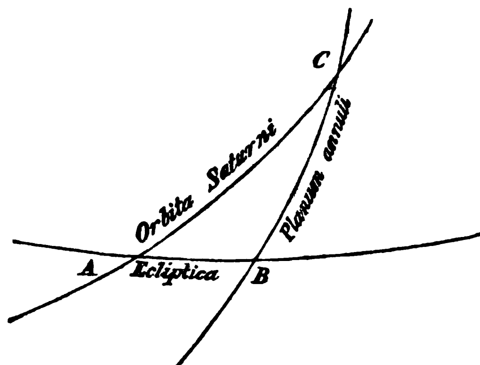
$$= \pm \; 5',2$$

si illa inclinatio inmutabilis assumatur, habemus annuli situm, Saturni orbitae ratione habita, ut sequitur:

Longitudinem adscendentis nodi = 170° 49′ 54″ + 41″,00 (t — 1800)

Inclinationem = 27° 0′ 9″

Quae valores sequenti modo ad eclipticam reducantur:



Triangulus sphaericus ABC, formatus per eclipticam AB, Saturni orbitam AC atque annuli planum BC, praebent has formulas:

$$tang.\,AB = \frac{sin.\,AC}{sin.\,CAB\ cotg.\,ACB + cos.\,CAB\ cos.\,AC}$$

$$cotg.\,AB = \frac{sin.\,A\ cotg.\,C + cos.\,A\ cos.\,AC}{sin.\,AC}$$

$$= \frac{sin.\,A + cos.\,A\ tang.\,C\ cos.\,AC}{tang.\,C\ sin.\,AC}$$

si ponamus $tang.\,\psi = tang.\,C\ cos.\,AC$ habemus

$$cotg\,AB = \frac{sin.\,A + cos.\,A\ tang.\,\psi}{tang.\,C\ sin.\,AC} = \frac{sin.\,A\ cos.\,\psi + cos.\,A\ sin.\,\psi}{tang.\,C\ sin.\,AC\ cos.\,\psi}$$

$$= \frac{sin.\,(A+\psi)}{tang.\,C\ sin.\,AC\ cos.\,\psi} = \frac{sin.\,(A+\psi)\ cos.\,AC}{tang.\,C\ sin.\,AC\ cos.\,AC\ cos.\,\psi}$$

$$= \frac{sin.\,(A+\psi)}{tang.\,AC\ sin.\,\psi}$$

$$tang.\,AB = \frac{tang.\,AC\ sin.\,\psi}{sin.\,(A+\psi)}$$

$$cos.\,B = -\,cos.\,A\ cos.\,C + sin.\,A\ sin.\,C\ cos.\,AC$$

$$cos.\,CBP = cos.\,A\ cos.\,C - sin.\,A\ sin.\,C\ cos.\,AC$$

$$= cos.\,A\ (cos.\,C - tang.\,A\ sin.\,C\ cos.\,AC)$$

si ponamus $tang.\,\psi' = tang.\,A\ cos.\,AC$, habemus

$$cos.\,CBP = cos.\,A\ (cos.\,C - sin.\,C\ tang.\,\psi')$$

$$= \frac{cos.\,A\ (cos.\,C\ cos.\,\psi' - sin.\,C\ sin.\,\psi')}{cos.\,\psi'}$$

0 $$= \frac{cos.\,A\ cos.\,(\psi' + C)}{cos.\,\psi'}.$$

Computandae ergo sunt sequentes formulae:

$$\left.\begin{aligned} tang.\,\psi &= tang.\,C\ cos.\,AC \\ tang.\,AB &= \frac{tang.\,AC\ sin.\,\psi}{sin.\,(A+\psi)} \end{aligned}\right\}\ (1) \qquad \left.\begin{aligned} tang.\,\psi' &= tang.\,A\ cos.\,AC \\ cos.\,CBP &= \frac{cos.\,A\ cos.\,(\psi'+C)}{cos.\,\psi'} \end{aligned}\right\}\ (2)$$

Pro anno 1800 *est:*

$$\begin{aligned} C &= 27^\circ\ 0'\ 9'' \\ AC &= 170\ 49\ 54\ -\ 111^\circ 56' 40'' = 58^\circ 53' 14'' \\ A &= 2\ 29\ 47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Log.\ tang.\,C &= Log.\ tang.\ 27^\circ\ 0'\ 9'' = 9.7072127 \\ Log.\ cos.\,AC &= Log.\ cos.\ 58\ 53\ 14 = 9.7132588 \\ Log.\ tang.\,\psi &= 9.4204715 \\ \psi &= 14^\circ 45' 6''6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Log.\ tang.\ AC &= Log.\ tang.\ 58^\circ 53' 14'' = 0.2192919 \\ Log.\ sin.\,\psi &= Log.\ sin.\ 14\ 45\ 6,6 = 9.4059145 \\ & \qquad 9.6252064 \\ Log.\,sin.\,(A+\psi) &= Log.\,sin\ 17\ 14\ 53,6 = 9.4720422 \\ Log.\ tang.\ AB &= 0.1531642 \\ AB &= 54^\circ 54'\ 0'',7 \\ & \qquad 111\ 56\ 40,0 \end{aligned}$$

Longitudo nodi adscendentis $= 166^\circ 50' 40'',7$

$$\begin{aligned} Log.\ tang.\ A &= Log.\ tang.\ 2^\circ 29' 47'' = 8.6394645 \\ Log.\ cos.\ AC &= Log.\ cos.\ 58\ 53\ 14 = 9.7132588 \\ Log.\ tang.\,\psi' &= 8.3527233 \\ \psi' &= 1^\circ 17' 25''9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Log.\,cos.\,A &= Log.\ cos.\ 2^\circ 29' 47'' = 9.9995877 \\ Log.\ cos.\ (\psi'+C) &= Log.\ cos.\ 28\ 17\ 34,9 = 9.9547467 \\ & \qquad 9.9443344 \\ Log.\ cos.\,\psi' &= Log.\ cos.\ 1\ 17\ 25,9 = 9.9998898 \\ Log.\ cos.\,CBP &= 9.9444446 \end{aligned}$$

$CBP = 28^\circ 22' 1''$ = Inclinationi pro anno 1800

Pro anno 1900 *est*

$C = 27° \; 0' \; 9''$
$AC = 171 \; 58 \; 14 \; - \; 112° 49' 15'' = 59° 8' 59''$
$A = 2 \; 29 \; 39$

Log. tang. C = *Log. tang.* 27° 0′ 9″ = 9.7072127
Log. cos. AC = *Log. cos.* 59 8 59 = 9.7099450

Log. tang. ψ = 9.4171577
ψ = 14° 38′ 40″,4

Log. tang. AC = *Log. tang.* 59° 8′ 59″ = 0.2238005
Log. sin. ψ = *Log. sin.* 14 38 40 ,0 = 9.4028145

9.6266150
Log. sin. (A + ψ) = *Log. sin.* 17 8 19 ,4 = 9.4693598

Log. tang. AB = 0.1572552
AB = 55° 9′ 13″,1
112 49 15 ,0
Longitudo nodi adscendentis = 167° 58′ 28″,1

Log. tang. A = *Log. tang.* 2° 29′ 39″ = 8.6390773
Log cos. AC = *Log. cos.* 59 8 59 = 9.7099450

Log. tang. ψ′ = 8.3490223
ψ′ = 1° 16′ 46″,5

Log. cos. A = *Log. cos.* 2° 29′ 39″ = 9.9995884
Log. cos. (ψ′ + C) = *Log. cos.* 28 16 55″,5 = 9.9447913

9.9443797
Log. cos. ψ′ = *Log. cos.* 1 16 46 ,5 = 9.9998917

Log. cos. CBP = 9.9444880
CBP = 28° 21′ 22″,8 = inclinationi pro anno 1900.

§. 23.

De ultima Besseli *disquisitione.*

Indefessus Bessel maxima cum diligentia, ope magni heliometri speculae astronomicae Regiomontanae, per quinque annos inde ab 1830 usque ad 1834, positionis an-

gulos annuli Saturni observavit; quas observationes conjunxit cum iis disparitionum reapparitionumque annuli, inde ab initio praecedentis seculi adhibitas. Illas suas observationes et computationes communicat in *Astronomische Nachrichten von* SCHUMACHER, Vol. 12. N°. 274; cujus operis versionem Gallicam protulit D. PLANTAMOUR in *Additions à la connaissance des tems pour l'an* 1838.

Praemittit BESSEL has animadversiones: situm nempe plani aequatoris Saturni mutationibus subjectum esse, quae valde aequales sunt nostrae terrae aequinoctiorum praecessioni. Secat ille planum fixum, quod cum plano orbitae Saturni tempore dato coïncidat, sub angulo fere constanti, ejusque lineas intersectionis se promovere cum hoc plano, admodum fere congruenter tempori, contra signorum ordinem. Quoniam complanatio sensibilis Saturni et propinquitas annuli efficiunt, ut planum annuli omnibus temporibus valde propinquum sit aequatoris plano, motus communis lineae nodorum utriusque plani componitur efficacia solis in ambo corpora; nondum autem quantitatem hujus motus ex theoria posse definiri, quoniam ad illud necessaria cognitio internae Saturni ejusque annuli constitutionis adhuc deest. Quam ob rem illam quantitatem tanquam incognitam in inquisitiones infert illamque observationibus vult determinare.

Ut situm plani annuli Saturni, quod ad eclipticam, exprimat, per variabiles quantitates, quae suam efficaciam in eum exercent, illum coördinat primo ad eclipticam 1750, proponitque adscendentis nodi longitudinem inclinationemque plani annuli quod ad hoc planum per $n_{,}$ et $i_{,}$; eodem modo per N et I longitudinem adscendentis nodi orbitae illius in eodem plano; et per $n_{,,}$ longitudinem adscendentis nodi plani annuli in plano orbitae Saturni anni 1750 et per $i_{,,}$ hujus utriusque plani inclinationem. Triangulus ergo sphaericus, qui intersectione circulorum majorum ad haec tria plana pertinentium oritur, praebet $n_{,}$ et $i_{,}$ per $n_{,,}$ et $i_{,,}$; scilicet:

$$\sin. i_{,} \sin. (n_{,} - N) = \sin. i_{,,} \sin. (n_{,,} - N),$$
$$\sin. i_{,} \cos. (n_{,} - N) = \cos. i_{,,} \sin. I + \sin. i_{,,} \cos. I \cos. (n_{,,} - N),$$
$$\cos. i_{,} = \cos. i_{,,} \cos. I - \sin. i_{,,} \sin. I \cos. (n_{,,} - N).$$

Ut ergo ex elementis $n_{,}$ et $i_{,}$, quae ratione eclipticae fixae anni 1750 definita sunt, nanciscitur longitudinem adscendentis nodi plani annuli in variabili eclipticae plano $= n$ et utriusque hujus plani inclinationem inter se $= i$; ponit loco longitudinis nodi adscendentis et inclinationis hujus plani variabilis eclipticae in fixa ecliptica anni 1750, signa usitata ad hanc rem Π et π, ut eo loco intersectionis distantiae aequatoris lineae fixaeque eclipticae anni 1750, lineae aequinoctiorum

ejusdem anni 1750, signum $\psi_{,}$. Triangulus sphaericus, ecliptica anni 1750, ecliptica variabili et annuli plano formatus, praebet tunc has formulas:

$$\begin{aligned} \sin. i \sin. (n - \Pi - \psi_{,}) &= \sin. i_{,} \sin. (n_{,} - \Pi), \\ \sin. i \cos. (n - \Pi - \psi_{,}) &= \cos. i_{,} \sin. \pi + \sin. i_{,} \cos. \pi \cos. (n_{,} - \Pi), \\ \cos. i &= \cos. i_{,} \cos. \pi - \sin. i_{,} \sin. \pi \cos. (n_{,} - \Pi). \end{aligned}$$

Hisce formulis notus fit plani annuli Saturni, quod ad variabilem eclipticam situs, quando $i_{,,}$ et $n_{,,}$ cognita sunt. Quod si consideramus plani annuli inclinationem quod ad Saturni orbitam anni 1750 invariabilem, statuimusque annuam mutationem nodorum ejus lineae per $-m$, tunc accipimus evolutione primarum formularum, pro anno $1750 + t$:

$$\begin{aligned} n_{,} &= n' - \left[\cos. \mathrm{I} - \frac{\sin. \mathrm{I}}{\mathrm{tang.}\, i'} \cos. (n' - \mathrm{N})\right] mt, \\ i_{,} &= i' + \sin. \mathrm{I} \sin. (n' - \mathrm{N})\, mt. \end{aligned}$$

In quibus n' et i' situm plani annuli, quod ad eclipticam pro epocha 1750 determinant. Porro talis ultimarum formularum evolutio praebet:

$$\begin{aligned} n &= n_{,} + \psi_{,} + \frac{\pi}{\mathrm{tang.}\, i_{,}} . \sin. (n_{,} - \Pi), \\ i &= i_{,} - \pi \cos. (n_{,} - \Pi). \end{aligned}$$

Ambarum combinatio tandem praebet

$$\begin{aligned} n &= n' + \psi_{,} - \left[\cos. \mathrm{I} - \frac{\sin. \mathrm{I}}{\mathrm{tang.}\, i'} \cos. (n' - \mathrm{N})\right] mt + \frac{\pi}{\mathrm{tang.}\, i'} . \sin. (n' - \Pi), \\ i &= i' + \sin. \mathrm{I} \sin. (n' - \mathrm{N})\, mt - \pi \cos. (n' - \Pi). \end{aligned}$$

Antecedenti computatione nonnullarum observationum, quas postea profert, approximatum valorem n et i pro anno 1833 nactus est:

$$n = 167^{\circ} 21', \quad i = 28^{\circ} 9' 30'',$$

secundum tabulas Saturni auctore BOUVARD, nobis est:

$$\mathrm{N} = 111^{\circ} 30' 13'',8; \quad \mathrm{I} = 2^{\circ} 29' 43'',63;$$

et secundum Tabulas Regiomontanas, pag. V.

$$\begin{aligned} \Pi &= 171^{\circ} 36' 10''; \quad \pi = + 0'',48892\, t; \\ \psi_{,} &= 50'',211\, t. \end{aligned}$$

Harum definitionum suppositione et quando sumtis approximativis valoribus quod ad n et i, adhuc emendationes δn et δi adjungimus, accipimus supra positis formulis:

$$n = 167^\circ 21' \; 0'' + \delta n + [50'',125 - 0,95206\,m]\,(t - 83),$$
$$i = \;\; 28^\circ \; 9' 30'' + \delta i \; - [\;0'',487 - 0,03553\,m]\,(t - 83).$$

Cum his ergo formulis comparat Bessel quae ad manus sunt, observationes, ut ita incognitas quantitates δn, δi et m definiat.

§. 24.

Deinceps Besselus communicat positionis angulos a se observatos, cum conditionalibus hinc profluentibus aequationibus, ut iis simul cum modo datis formulis n et i utatur. Observationes autem errore indicis instrumenti non sunt affectae, neque divisionum cycli positionis; quibus adhuc correctionem attulit erroris alicujus, quod inflexione oritur, qua rotatio tubi circa axem longitudinalem efficitur, quae facit indicis cycli positionis errorem variabilem; cujus maximam, e medio quatuor observationum invenit = 2′ 34″; quumque ejus efficacia in observationes, ut Bessel ait, in omni positione instrumenti accurate possit computari.

Quando geocentricam adscensionem rectam et declinationem per α et δ statuimus, longitudinem adscendentis nodi plani annuli in aequatore terrae sumtum per I, latitudinem terrae supra plano annuli per b et angulum positionis inferioris partis annuli ellipseos per p, tunc nobis est:

$$\cos. b \cos. p = \sin. \mathrm{I} \cos. (\alpha - \mathrm{N}),$$
$$\cos. b \sin. p = \cos. \mathrm{I} \cos. \delta + \sin. \mathrm{I} \sin. \delta \sin. (\alpha - \mathrm{N}),$$
$$\sin. b = - \cos. \mathrm{I} \sin. \delta + \sin. \mathrm{I} \cos. \delta \sin. (\alpha - \mathrm{N});$$

et ut computemus N et I nobis sunt formulae:

$$\sin. \mathrm{I} \sin. \mathrm{N} = \sin. i \sin. n,$$
$$\sin. \mathrm{I} \cos. \mathrm{N} = \cos. i \sin. \omega + \sin. i \cos. \omega \cos. n,$$
$$\cos. \mathrm{I} = \cos. i \cos. \omega - \sin. i \sin. \omega \cos. n;$$

in quibus ω obliquitas eclipticae significat.

Observati positionis anguli harum formularum ope praebent sequentes aequationes conditionales:

	1830	p	Aequationes conditionales.				Observ.
Jun.	12	82° 41′,3	0 = + 4,3	+ 0,2239 δn	− 0,9200 δi	+ 0,73 m.	2
	19	43,5	+ 0,6	+ 0,2276	− 0,9171	+ 0,74	1
	21	38,7	+ 5,0	+ 0,2288	− 0,9163	+ 0,74	1
	25	54,6	− 11,8	+ 0,2311	− 0,9144	+ 0,75	2
	26	40,9	+ 1,7	+ 0,2317	− 0,9140	+ 0,76	2
Febr.	1	32,6	+ 8,7	+ 0,2353	− 0,9110	+ 0,76	1
	6	31,4	+ 8,8	+ 0,2384	− 0,9084	+ 0,76	1
	9	23,4	+ 16,1	+ 0,2403	− 0,9068	+ 0,76	2
	14	6,2	+ 32,3	+ 0,2433	− 0,9042	+ 0,76	1
	15	22,1	+ 16,2	+ 0,2439	− 0,9037	+ 0,76	1
	16	17,1	+ 21,0	+ 0,2445	− 0,9031	+ 0,76	1
Mart.	1	18,9	+ 16,8	+ 0,2516	− 0,8969	+ 0,76	2
	3	56,8	− 21,4	+ 0,2526	− 0,8960	+ 0,76	2
	10	13,2	+ 21,2	+ 0,2559	− 0,8930	+ 0,77	1
	14	2,9	+ 31,0	+ 0,2575	− 0,8914	+ 0,77	2
	15	22,1	+ 11,7	+ 0,2579	− 0,8910	+ 0,77	1
	16	34,7	− 1,0	+ 0,2582	− 0,8907	+ 0,77	1
	17	20,3	+ 13,2	+ 0,2586	− 0,8903	+ 0,77	1
April	13	14,2	+ 18,0	+ 0,2634	− 0,8853	+ 0,77	1
	19	50,0	− 17,7	+ 0,2630	− 0,8857	+ 0,76	2
	21	50,4	− 18,0	+ 0,2626	− 0,8860	+ 0,76	1
	1831						
Januar.	20	83° 43′,9	− 9,7	+ 0,1171	− 0,9825	+ 0,29	1
Febr.	16	37,3	− 11,1	+ 0,1319	− 0,9772	+ 0,30	1
	19	42,0	− 16,8	+ 0,1337	− 0,9766	+ 0,31	1
Mart.	24	6,3	+ 10,0	+ 0,1514	− 0,9687	+ 0,32	2
	26	3,6	+ 12,3	+ 0,1522	− 0,9683	+ 0,32	2
	28	14,1	+ 1,5	+ 0,1530	− 0,9679	+ 0,32	1
April	1	21,8	− 6,9	+ 0,1544	− 0,9672	+ 0,32	1
	10	29,2	− 15,5	+ 0,1568	− 0,9660	+ 0,32	1
	11	12,1	+ 1,5	+ 0,1570	− 0,9659	+ 0,32	1
	12	19,6	− 6,1	+ 0,1572	− 0,9658	+ 0,32	2
	20	2,3	+ 10,7	+ 0,1584	− 0,9652	+ 0,31	1
	21	12,8	+ 0,1	+ 0,1585	− 0,9651	+ 0,31	1
	27	28,4	− 5,5	+ 0,1587	− 0,9649	+ 0,31	1
	1832						
Febr.	9	84° 31′,5	+ 0,4	+ 0,0205	− 1,0012	+ 0,05	2
	11	29,5	+ 1,7	+ 0,0215	− 1,0012	+ 0,05	2
	13	25,3	+ 5,2	+ 0,0225	− 1,0012	+ 0,05	1
	14	56,1	− 26,0	+ 0,0230	− 1,0012	+ 0,05	2

1832		*p*	*Aequationes conditionales.*				*Observ.*
Febr.	15	84°43′,6	0 = − 13,8	+ 0,0235 δn	− 1,0012 δi	+ 0,05 *m*.	2
	16	31 ,9	− 2,5	+ 0,0241	− 1,0012	+ 0,05	2
	17	48 ,3	− 19,2	+ 0,0246	− 1,0011	+ 0,05	2
	19	47 ,7	− 19,4	+ 0,0258	− 1,0011	+ 0.05	2
	22	43 ,1	− 15,9	+ 0,0274	− 1,0011	+ 0,06	2
	28	33 ,5	− 8,5	+ 0,0308	− 1,0010	+ 0,06	2
Mart.	1	29 ,7	− 5,5	+ 0,0320	− 1,0009	+ 0,06	2
	11	17 ,8	+ 2,7	+ 0,0378	− 1,0006	+ 0,06	2
	15	24 ,7	− 5,6	+ 6,0400	− 1,0004	+ 0,06	2
	16	33 ,5	− 15,5	+ 0,0406	− 1,9003	+ 0,06	1
	28	4 ,5	+ 10,3	+ 0,0468	− 0,9997	+ 0,06	2
	31	9 ,6	+ 4,3	+ 0,0482	− 0,9996	+ 0,06	3
April.	1	8 ,1	+ 5,5	+ 0,0487	− 0,9995	+ 0,06	4
Maii	5	83 45 ,2	+ 22,8	+ 0,0579	− 0,9982	+ 0,07	4
1833							
Febr.	22	85°36 ,5	+ 17,4	− 0,0744	− 0,9882	0,00	3
	23	36 ,4	− 2,4	− 0,0739	− 0,9382	0,00	3
	—	40 ,1	+ 1,3	− 0,0739	− 0,9882	0,00	3
	27	46 ,7	+ 9,5	− 0,0719	− 0,9889	0,00	3
Mart.	29	25 ,7	+ 0,8	− 0,0550	− 0,9932	0,00	3
April.	5	31 ,9	+ 9,8	− 0,0513	− 0,9941	0,00	3
	12	16 ,7	− 2,9	− 0,0480	− 0,9948	0,00	3
	17	13 ,8	− 4,2	− 0,0457	− 0,9953	0,00	3
1834							
Mart.	3	87 12 ,4	− 17,5	− 0,1694	− 0,9430	+ 0,15	2
	7	18 ,0	− 24,7	− 0,1672	− 0,9445	+ 0,15	3
	13	7 ,4	− 16,7	− 0,1638	− 0,9468	+ 0,14	3
	18	86 55 ,8	− 7,4	− 0,1610	− 0,9486	+ 0,14	3
	29	33 ,4	+ 9,9	− 0,1548	− 0,9523	+ 0,14	4
Maji	10	13 ,2	+ 13,5	− 0,1345	− 0,9635	+ 0,12	4
	12	28 ,8	− 2,6	− 6,1338	− 0,9638	+ 0,12	4

Ex quibus Bessel sumendo medium arithmeticum ex quinorum annorum aequationibus conditionalibus, has quinque aequationes obtinet:

1830	29 Observ.		$0 = + 6',07 + 0,2456\,\delta n - 0,9017\,\delta i + 0,76\,m.$
1831	16 «		$- 1,21 + 0,1501 \quad - 0,9690 \quad + 0,31$
1832	39 «	(1)	$- 2,23 + 0,0356 \quad - 1,0002 \quad + 0,06$
1833	24 «		$+ 3,66 - 0,0618 \quad - 0,9914 \quad 0,00$
1834	23 «		$- 4,23 - 0,1525 \quad - 0,9532 \quad + 0,14$

Ex quibus omnibus observationibus medio sumto, habemus sequentem aequationem conditionalem:

131 Observ. . . . . (I) $0 = + 27'',6 + 0,0452\,\delta n - 0,2647\,\delta i + 0,25\,m.$

§. 25.

Ex observationibus, quae ad manum sunt disparitionum et reapparitionum annuli a Selander *Upsalae* collectis, Bessel sequentes sibi usitatas observationes duxit:

1)	1701	Nov.	25,5*	Terra australis,
2)	1714	Octobr.	15,75**	» »
3)	1715	Febr.	10,45*	Sol borealis,
4)		Mart.	22,5**	Terra »
5)		Julii	12,375**	» »
6)	1731	Febr.	15,25*	» australis,
7)	1760	Maji	11,7*	Sol »
8)	1773	Octobr.	11,7**	Terra »
9)	1774	Jan.	10,7*	Sol borealis,
10)		April.	4,5**	Terra »
11)		Junii	30,4**	» »
12)	1789	Maji	4,7**	» »
13)		Aug.	27,5**	» »
14)		Octobr.	10,4**	Sol »
15)	1790	Jan.	29,25**	Terra australis,
16)	1802	Dec.	14,75**	» »

---

(1) Primus aequationis terminus ex medio observationum anni 1832 erat, secundum expositionem Besseli — 0',10; illud reputans accipiebam — 2',23, quae differentia suam efficaciam quodammodo in sequentes eventus debet exercere; benevolentia autem Besseli, Viri Clarissimi, mihi plane satisfactum est, quum ad me scripserit, illud perperam esse descriptum, debereque esse, ut ego computaveram, nempe — 2',23; atque propterea necesse esse ut primus terminus resultati terminalis ex 131 observationibus + 27'',6 sit, loco illius quod in textu est + 65'',2.

17)	1803 Jan.	3,6**	Terra australis,	
18)	Junii	16,4**	Sol	»
19)	1833 April	26,37**	Terra borealis,	
20)	Junii	13,37**	»	»

Ad has observationes animadvertit Bessel, ut, quoniam observator tempus disparitionis vel reapparitionis annuli Saturni non stricte potest definire, sed tantummodo diem dicere, quo eum, in primo casu, non amplius et in ultimo casu nondum videre potest, hisce observationibus hujuscemodi, tantummodo duo limites definiantur, inter quos tempus disparitionis vel reapparitionis interjaceat. Unus horum limitum tunc solum ut disparitionis reapparitionisve approximatio temporis considerari poterit, quando prope se invicem incidunt; quod tantum locum habere potest, si nullum observator praetermittit diem adjuvaturque aëris conditione. Ad tres ergo classes observationes refert:

1°. Quando disparitionis reapparitionisve tempus duntaxat generaliter et non definitus dies, quo vel cessaverit vel coeperit ejus visibilitas, dari potest; quod datum tunc utriusque limitis expers, nullius potest esse utilitatis.

2°. Quando unus solum traditur limes, vel secundus non valde prope primo jacet, quo disparationis aut reapparitionis tempus non perfecte definiri potest.

3°. Quando tandem uterque traditur limes.

Quum id consideramus, data illa quae ad manum sunt, disparitionum nempe reapparitionumque diligenter in classes redegit Besselus, designans, ut supra vidimus, unico limite determinatas per * et duobus limitibus determinatas per **, ita ut quinque ad primum quindecimque ad ultimum genus pertineant. Fundamenta, quae ad hoc eum ducunt, videmus in ejus tractatu observationum dictarum in supra memoratis *Astronomische Nachrichten*, pag. 159—164. et *Connaissance des tems pour l'an* 1838, pag. 35—40.

Habemusque ergo viginti observationes disparitionum reapparationumque annuli, quae originem habent, partim in transitibus solis partimque transitibus terrae per annuli planum; quod juxta eas positum est, qui transitus ejus rei est causa, et quod ab utroque latere, vel boreali vel australi disparuit vel reapparuit.

Assumsit porro Bessel disparitionis vel reapparitionis annuli tempus tali modo, disparitionem *non post*, atque reapparitionem *non ante* tempus, quo revera videatur annulus, ita ut constet terram et solem unoquoque datorum temporum, ad idem latus annuli stetisse, idque ad illud latus, quod juxta supra positis datis adscriptum est. Quando ergo annuli constitutio hujusmodi est, ut supra ea

assumebatur, illum nempe corpus esse duabus parallelis superficiebus determinatum, tam tenuis crassitudinis, ut lux ab eo in terram reflexa non aliter conspici possit, quam quando ab una facierum lateralium oriatur; opus ergo est, ut *planum* definire conemur, quocum et terra et sol, quoque viginti datorum temporum fere conveniat atque adeo ad latera temporibus ad scripta elevatum sit. Si ergo planum non existet, quod his conditionibus respondeat, tunc suppositio, quae basi conditionum inserviit, constare non potest. Unde ergo sequitur, aut utriusque annuli latus non terminatum esse parallelis planis, aut illa tunc quidem adhuc visibilia esse debere, quando ab ejus planis lateralibus nulla amplius lux ad nos possit pervenire. Qui ultimus casus non recte quidem potest assumi, quia tunc annulus, sicut telescopio Herschelii magno non disparebat, neque etiam aliis tubis opticis non posset disparere, dum tandem, omnes astronomi, Herschelio excepto, eum ex conspectu amiserunt; primus autem casus probabilis fit, propter observatam in universum in omnibus disparitionibus et reapparitionibus annuli non simultaneam ambarum ansarum invisibilitatem. Si autem nullum planum exstaret, quod positis satisfaciat conditionibus, possemus tandem planum assumere, supra quod terra vel sol, datis temporibus, se quam minime elevent, haud solliciti in quanam directione hae elevationes locum habeant. Quamvis Saturni annulus non adsit huic plano, ita tamen definitum planum ut illius fingendum est.

Quando geocentricum vel heliocentricum Saturni locum, ratione eclipticae habita, per longitudinem $= \lambda$ et latitudinem $= \beta$ statuimus, nanciscimur terrae vel solis elevationem supra planum, quod per centrum Saturni transeat; quae positio, quod ad eclipticam per longitudinem ejus lineae nodorum $= n + \delta n$ ejusque inclinationis $= i + \delta i$ data est, illâ formulâ:

$$\begin{aligned} sin. b = - cos. i\, sin. \beta + sin. i\, cos. \beta\, sin. (\lambda - n) \\ - sin. i\, cos. \beta\, cos. (\lambda - n) . \delta n \\ + [sin. i\, sin. \beta + cos. i\, cos. \beta\, sin. (\lambda - n)] . \delta i. \end{aligned}$$

In ejus applicatione, formulae ex pag. 84. sumantur, nempe:

$$\begin{aligned} n &= 167°21'\ 0'' + \delta n + (50'',125 - 0'',95206 m)\ (t - 83), \\ i &= \ \ 28\ \ 9\ 30\ + \delta i - (\ 0\ ,487 - 0\ ,03553 m)\ (t - 83), \end{aligned}$$

incognitae quantitatis m loco, Bessel ponit novam quantitatem $m' = m - 10''$, cujus valor minor fiet quam m, ita ut observationes cum formulis

$$\begin{aligned} n &= 167°21'\ 0'' + \delta n + (40'',6044 - 0,95206 m')\ (t - 83), \\ i &= \ \ 28\ \ 9\ 30\ + \delta i - (\ 0\ ,1317 - 0,03553 m')\ (t - 83), \end{aligned}$$

comparatae sint. Valores eo adhibiti λ et β, Bessel quod ad Saturnum ex tabulis Bouvardii et quod ad solem, ex suis tabulis computavit, sequentesque eventus nactus est:

			λ	β	
1701	Nov.	25,25	350° 3′ 47″,1	— 2°20′ 17″,5	Geocentricè.
1714	Octob.	15,75	169 17 13 ,2	+ 1 52 28 ,4	«
1715	Febr.	10,45	170 0 8 ,5	+ 2 8 2 ,7	Heliocentricè.
	Mart.	22,5	170 11 1 ,4	+ 2 24 54 ,6	Geocentricè.
	Julii	12,375	169 48 51 ,2	+ 2 8 11 ,7	«
1731	Febr.	15,25	350 41 58 ,6	— 2 0 40 ,3	«
1760	Maji	11,7	351 1 33 ,4	— 2 8 47 ,6	Heliocentricè.
1773	Octob.	11,7	170 29 4 ,4	+ 1 53 21 ,9	Geocentricè.
1774	Januar.	10,7	170 41 25 ,5	+ 2 8 9 ,6	Heliocentricè.
	April.	4,5	171 3 42 ,3	+ 2 26 6 ,7	Geocentricè.
	Junii	30,4	170 39 16 ,0	+ 2 11 32 ,9	«
1789	Maji	4,7	350 27 50 ,4	— 1 54 8 ,5	«
	Aug.	27,5	350 59 43 ,0	— 2 20 25 ,9	«
	Octob.	10,4	350 47 11 ,5	— 2 8 10 ,9	Heliocentricè.
1790	Januar.	29,25	350 37 31 ,9	— 2 3 28 ,2	Geocentricè.
1802	Dec.	14,75	170 27 36 ,1	+ 1 59 54 ,6	«
1803	Januar.	3,6	170 41 53 ,7	+ 2 5 24 ,1	«
	Junii	16,4	170 46 16 ,9	+ 2 8 5 ,2	Heliocentricè.
1833	April.	26,37	171 52 29 ,5	+ 2 25 39 ,9	Geocentricè.
	Junii	13,37	171 37 2 ,9	+ 2 15 6 ,9	«

et quod ad expressiones b, nanciscitur

1	1701	Nov.	20	+ 5′ 8″,7	+ 0,4703 δn	— 0,0836 δi	+ 59,09 m'.	♄* —
2	1714	Octob.	15	— 6 37 ,8	— 0,4710	+ 0,0657	— 53,28	♄** —
3	1715	Febr.	10	— 0 15 ,9	— 0,4705	+ 0,0788	— 53,14	⊙* +
4		Mart.	22	— 10 3 ,3	— 0,4703	+ 0,0838	— 53,09	♄** +
5		Julii	12	— 5 50 ,4	— 0,4706	+ 0,0758	— 52,95	♄** +
6	1731	Febr.	15	— 20 49 ,0	+ 0,4702	— 0,0857	+ 45,91	♄* —
7	1760	Maji	11	— 13 33 ,0	+ 0,4702	— 0,0867	+ 32,74	⊙* —
8	1773	Octob.	11	+ 7 36 ,5	— 0,4707	+ 0,0740	— 26,69	♄** —
9	1774	Januar.	10	+ 0 17 ,3	— 0,4705	+ 0,0791	— 26,58	⊙* +
10		April	4	— 5 8 ,8	— 0,4701	+ 0,0872	— 26,47	♄** +
11		Junii	30	— 3 51 ,9	— 0,4705	+ 0,0790	— 26,37	♄** +
12	1789	Maji	4	— 1 22 ,9	+ 0,4707	— 0,0711	+ 19,68	♄** +
13		Aug.	27	+ 6 54 ,8	+ 0,4703	— 0,0828	+ 19,53	♄** +

14	1789 Octob.	10	+ 2′ 2″,1	+ 0,4705 δn	− 0,0779 δi	+ 19,48 m'.	♁ ** +
15	1790 Januar.	29	+ 2 31 ,1	+ 0,4706	− 0,0747	+ 19,34	♁ ** −
16	1802 Dec.	14	− 8 9 ,4	− 0,4708	+ 0.0695	− 13,54	♁ ** −
17	1803 Januar.	3	− 6 17 ,5	− 0,4706	+ 0,0789	− 13,52	♁ ** −
18	Junii	16	− 6 43 ,8	− 0,4706	+ 0,0753	− 13,32	⊙ ** −
19	1833 April	26	− 0 19 ,1	− 0,4700	+ 0,0894	+ 0,14	♁ ** +
20	Junii	13	+ 1 23 ,3	− 0,4702	+ 0,0840	+ 0,21	♁ ** +

Ultima hujus tabulae columna notat genus transitus, perfectionem vel imperfectionem observationum atque visibile annuli latus.

§. 26.

Ostendunt hae computationes, veram non esse posse positionem, duobus parallelis planis esse annulum terminatum. Singuli trium perfecte observatorum transituum hanc positionem revera repugnant: 15 die Octobris 1714, terra, quod ad unum planorum, quod annuli plano fere respondebat, debuerat esse magis australe quam 22 Martii 1715; die 11 Octobris 1773 magis australe quam quarto Aprilis 1774; quarto die Maji 1789 magis boreale quam 29 Jannarii 1790; et tamen in his tribus casibus contrarium obtinebat. Ejusmodi inquisitione Bessel jam antea attentus factus erat (1), atque nunc perfectiore harum observationum hac operatione confirmatus est.

Quum ergo his consideratis clarum fiat, non posse determinari planum, trans quod terrae solisque elevationes in temporibus dictis signa accipiant, quae ultima columna tabulae ostendit; planum illud, quod ut annuli planum assumere volumus, duntaxat ita determinari potest, ut summa quadratorum elevationum terrae vel solis, quae obtinent iis temporibus, quando visibilitas annuli cessat, aut rursus incipit, quam minimum valorem accipiat. Hac ratione, ex tabula 15 data, quae ab utraque parte terminata sunt, Besselus tractavit secundum minimorum quadratorum methodum, atque eo nanciscitur aequationes ad definitionem δn, δi et m', scilicet:

---

(1) *Astron. Nachr.*, N°. 193. pag. 19.

$$0 = + \quad 1527{,}9 + \quad 3{,}3205\,\delta n - \quad 0{,}5486\,\delta i + \quad 167{,}949\,m',$$
$$0 = + 102776{,}0 + 167{,}949 \; \delta n - 27{,}317 \; \delta i + 12635{,}3 \quad m'.$$

Si ponimus in eo $m - 10''$ loco m atque combinamus ea cum aequatione

$$0 = + 27'',6 + 0{,}0452\,\delta n - 0{,}9647\,\delta i + 0{,}25\,m$$

pag. 87. data, quae observationibus positionis angulorum lineae ansarum fundata est.

Tunc solutio harum trium aequationum praebet:

$$\delta n = - 144'',75,$$
$$\delta i = + \; 22\,,84,$$
$$m = + \quad 3\,,839;$$

ergo nanciscimur, quod ad longitudinem nodi adscendentis aequatoris Saturni ejusque inclinationis, tempori T:

$$n = 166°53'1'',74 + 46'',470\,(T - 1800),$$
$$i = \; 28\;10\;4\,,42 - \; 0\,,351\,(T - 1800).$$

planum ita determinatum aequatoris Saturni ponit singulos annos observationum positionis angulorum annuli usque ad

1830	+ 5′ 10″,9	29 Observ.
1831	− 1 55 ,2	16 »
1832	− 2 41 ,6	39 »
1833	+ 3 25 ,9	24 »
1834	− 4 13 ,0	23 »

itaque est, quod ad ejus inclinationem, eo plus ut rectum assumendum, quia non possumus scire, utrum recessiones annuli ab eo, non etiam differentias in positionis angulis efficiant.

Recessiones terrae vel solis ab illo plano, tempore cujusvis quindecim, datorum disparitionum et reapparitionum annuli, quae ad fundamentum harum inquisitionum sumtae sunt, sunt sequentes:

			b	
1714	Octobr.	15	0′ 0″	♁ —
1715	Mart.	22	— 3 27	♁ +
	Julii	12	+ 0 45	♁ +
1773	Octobr.	11	+ 11 30	♁ —
1774	April.	4	— 1 15	♁ +
	Junii	30	0 0	♁ +
1789	Maji	4	— 4 34	♁ +
	Aug.	27	+ 3 45	♁ +
	Octobr.	10	+ 1 8	⊙ +
1790	Januar.	29	+ 0 37	♁ —
1802	Dec.	14	— 5 37	♁ —
1803	Januar.	3	— 3 45	♁ —
	Junii	16	— 4 12	⊙ —
1833	April.	26	+ 0 32	♁ +
	Junii	13	+ 2 32	♁ +

Maxima recessio terrae a definito plano, eaque quidem cum signo contrario, locum habet 11 Octobris 1773, in observatione quae nullo dubio subjecta esse videtur: illa recessio fuisset adhuc major, si datum Mayeri adhibitum esset. Hinc apparet ergo, annulum adhuc fuisse visum, dum terra fere quartam partem gradus infra latus a sole illuminatum ab eo distabat.

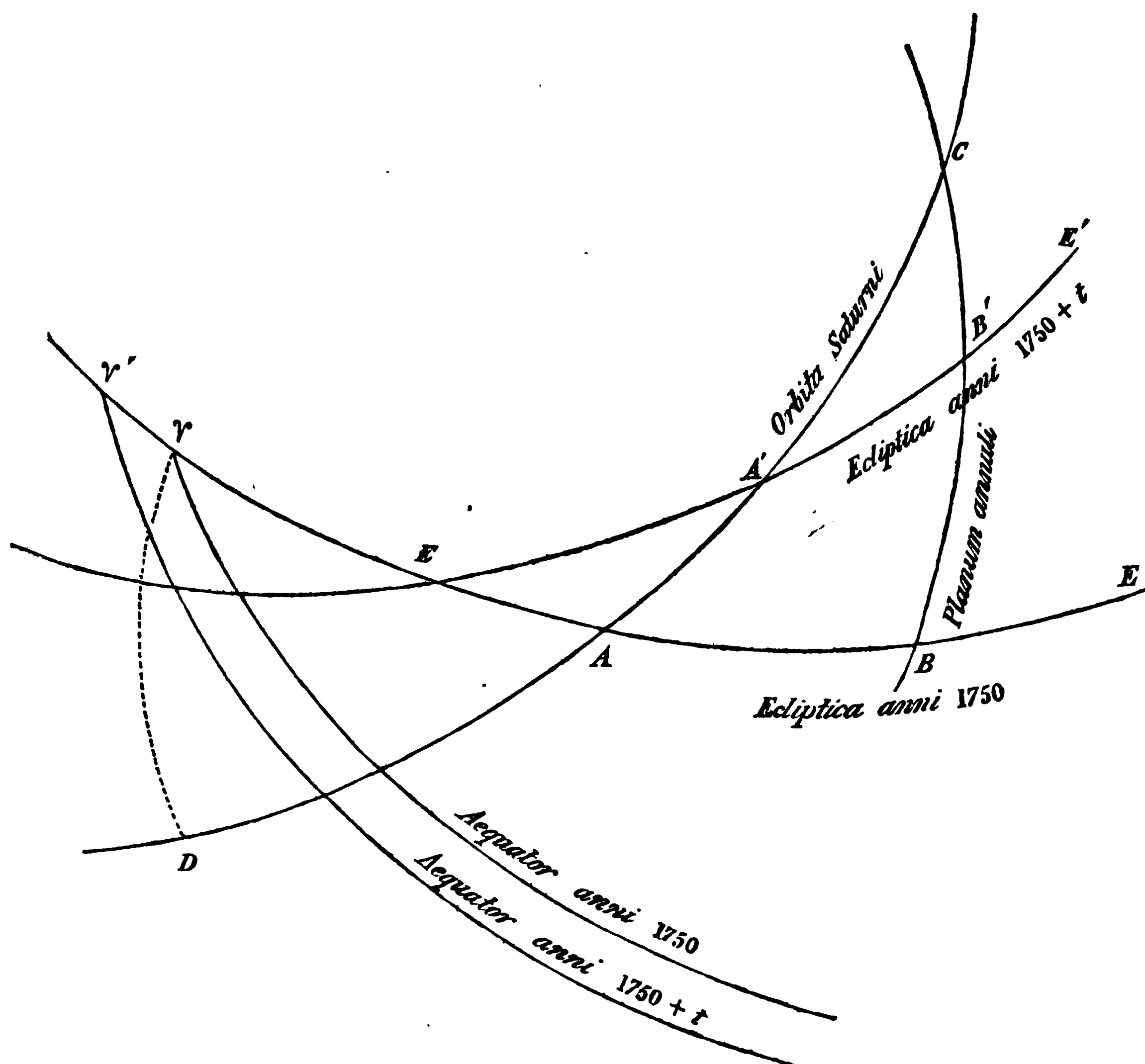
Quinque ceterae observationes, quae simpliciter duntaxat terminatae sunt, quasque ergo non tam perfectas possumus habere, praebent has recessiones terrae et solis ab illo definito plano:

			b	
1701	Nov.	25	— 2′ 6″	♁ —
1715	Febr.	10	+ 6 17	⊙ +
1731	Febr.	15	— 26 42	♁ —
1760	Maji	11	— 18 5	⊙ —
1774	Januar.	10	+ 4 11	⊙ +

Illi eventus, quod ad signa, cum observationibus conveniunt, ita ut recessiones disparitionum nimis mature vel reapparitionum nimis sero datarum contineant; cadunt etiam maximae recessiones in duas illas observationes, quae tamen non valde magnam certitudinem exspectare sinebant. Illae recessiones non adversantur ergo certitudini definitionis medii plani annuli.

§. 27.

Quum, ut videmus, illa Besselii methodus ad accuratissimos ducat eventus; eam adhibeam, ut illam applicem ad meam de disparitionibus reapparitionibusque observationum congeriem, quas observationes jam collegeram, antequam eximium illud Besseli opus mihi innotuerat. Antequam autem ad illud transeam, formulas illas, quae huic fini inserviunt, quam simplicissime evolvam, et inde a principio demonstrabo, ut sic firma basi procedamus.



Sit in hac *Figura*

$\Upsilon B \;= n'$ ..... Longitudo nodi adscendentis plani annuli in ecliptica anni 1750 et pro eodem anno.

$CBE \;= i'$ ..... Inclinatio plani annuli ad haec eclipticam, pro eodem epocha.

$\Upsilon A \;= N$ ..... Longitudo adscendentis nodi orbitae Saturni in ecliptica anni 1750.

$CAB \;= I$ ..... Inclinatio orbitae Saturni ad hanc eclipticam.

$\Upsilon B \;= n_{,}$ ..... Longitudo nodi adscendentis annuli in ecliptica anni 1750, ad certum annorum numerum post 1750.

$CBE \;= i_{,}$ ..... Inclinatio plani annuli ad hanc eclipticam pro eadem epocha.

$- m$ ..... Motus annuus adscendentis nodi plani annuli in plano orbitae Saturni.

$DC \;= n_{,,}$ ..... Longitudo adscendentis nodi plani annuli in orbita Saturni anni 1750.

$ACB \;= i_{,,}$ ..... Inclinatio plani annuli ad hanc orbitam.

$\Upsilon E'' \;= \Pi$ ..... Longitudo nodi adscendentis variabilis eclipticae in fixa ecliptica anni 1750.

$BE''B' = \pi$ ..... Inclinatio variabilis eclipticae ad fixam eclipticam anni 1750.

$\Upsilon'\Upsilon \;= \psi_{,}$ ..... Distantia intersectionis aequatoris variabilis et eclipticae anni 1750 a linea aequinoctiorum anni 1750.

$E''B' \;= n$ ..... Longitudo nodi adscendentis plani annuli in ecliptica variabili.

$CB'E' = i$ ..... Inclinatio plani annuli ad variabilem eclipticam.

$\Upsilon A \;= DA.$

Triangulus sphaericus ABC praebet tres has aequationes:

$$\begin{aligned} &sin.\,ABC\; sin.\,AB = sin.\,ACB\; sin.\,AC, \\ &sin.\,ABC\; cos.\,AB = cos.\,ACB\; sin.\,CAB + sin.\,ACB\; cos.\,CAB\; cos.\,AC, \\ &cos.\,ABC = -\,cos.\,ACB\; cos.\,CAB + sin.\,ACB\; sin.\,CAB\; cos.\,AC. \end{aligned}$$

quumque sit

$$ABC = 180^\circ - i', \quad AB = n' - N, \quad ACB = i_{,,}, \quad AC = n_{,,} - N \text{ et } CAB = I;$$

ergo nobis est,

$$\left.\begin{aligned} &sin.\,i'\; sin.\,(n' - N) = sin.\,i_{,,}\; sin.\,(n_{,,} - N), \\ &sin.\,i'\; cos.\,(n' - N) = cos.\,i_{,,}\; sin.\,I + sin.\,i_{,,}\; cos.\,I\; cos.\,(n_{,,} - N), \\ &cos.\,i' = cos.\,i_{,,}\; cos.\,I - sin.\,i_{,,}\; sin.\,I\; cos.\,(n_{,,} - N). \end{aligned}\right\} (A)$$

ergo pro elementis $n_,$ et $i_,$ quod ad numerum t annorum post 1750, ponentes annuum motum nodi adscendentis plani annuli in plano orbitae Saturni $= - m$.

$$\left.\begin{aligned} \sin. i_, \sin. (n_, - \mathrm{N}) &= \sin. i_{,,} \sin. (n_{,,} - \mathrm{N} - mt), \\ \sin. i_, \cos. (n_, - \mathrm{N}) &= \cos. i_{,,} \sin. \mathrm{I} + \sin. i_{,,} \cos. \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N} - mt), \\ \cos. i_, &= \cos. i_{,,} \cos. \mathrm{I} - \sin. i_{,,} \sin. \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N} - mt). \end{aligned}\right\} (\mathrm{A}')$$

Triangulus sphaericus BE″B′ praebet:

$$\begin{aligned} \sin. \mathrm{E''B'B} \sin. \mathrm{E''B'} &= \sin. \mathrm{E''BB'} \sin. \mathrm{E''B}, \\ \sin. \mathrm{E''B'B} \cos. \mathrm{E''B'} &= \cos. \mathrm{E''BB'} \sin. \mathrm{BE''B'} + \sin. \mathrm{E''BB'} \cos. \mathrm{BE''B'} \cos. \mathrm{E''B}, \\ \cos. \mathrm{E''B'B} &= - \cos. \mathrm{E''BB'} \cos. \mathrm{BE''B'} + \sin. \mathrm{E''BB'} \sin. \mathrm{BE''B'} \cos. \mathrm{E''B}, \end{aligned}$$

quumque sit

$\mathrm{E''B'B} = i$, $\mathrm{E''B'} = n - \Pi - \psi_,$, $\mathrm{E''BB'} = 180^\circ - i_,$, $\mathrm{E''B} = n' - \Pi$ et $\mathrm{BE''B'} = \pi$;

nobis est

$$\left.\begin{aligned} \sin. i \sin. (n - \Pi - \psi_,) &= \sin. i_, \sin. (n_, - \Pi), \\ \sin. i \cos. (n - \Pi - \psi_,) &= - \cos. i_, \sin. \pi + \sin. i_, \cos. \pi \cos. (n_, - \Pi), \\ \cos. i &= \cos. i_, \cos. \pi + \sin. i_, \sin. \pi \cos. (n_, - \Pi). \end{aligned}\right\} (\mathrm{B})$$

Aequationes (A′) cum evolvimus, nanciscimur

$$\begin{aligned} \sin. i_, \sin. (n_, - \mathrm{N}) &= \sin. i_{,,} \sin. (n_{,,} - \mathrm{N}) \cos. mt - \sin. i_{,,} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N}) \sin. mt, \\ \sin. i_, \cos. (n_, - \mathrm{N}) &= \cos. i_{,,} \sin. \mathrm{I} + \sin. i_{,,} \cos. \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N}) \cos. mt + \sin. i_{,,} \cos. \mathrm{I} \sin. (n_{,,} - \mathrm{N}) \sin. mt \\ \cos. i_, &= \cos. i_{,,} \cos. \mathrm{I} - \sin. i_{,,} \sin. \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N}) \cos. mt - \sin. i_{,,} \sin. \mathrm{I} \sin. (n_{,,} - \mathrm{N}) \sin. mt \end{aligned}$$

$\cos. mt = 1$ atque $\sin. mt = mt$ ponentes, habemus:

$$\left.\begin{aligned} \sin. i_, \sin. (n_, - \mathrm{N}) &= \sin. i_{,,} \sin. (n_{,,} - \mathrm{N}) - \sin. i_{,,} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N}) . mt, \\ \sin. i_, \cos. (n_, - \mathrm{N}) &= \cos. i_{,,} \sin. \mathrm{I} + \sin. i_{,,} \cos. \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N}) + \sin. i_{,,} \cos. \mathrm{I} \sin. (n_{,,} - \mathrm{N}) . mt, \\ \cos. i_, &= \cos. i_{,,} \cos. \mathrm{I} - \sin. i_{,,} \sin. \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N}) - \sin. i_{,,} \sin. \mathrm{I} \sin. (n_{,,} - \mathrm{N}) . mt. \end{aligned}\right\} (\gamma)$$

Ex duabus ultimis aequationibus (A), $\cos. i_{,,}$ eliminantes, nanciscimur

$$\cos. i_{,,} = \frac{\sin. i' \cos. (n' - \mathrm{N}) - \sin. i_{,,} \cos. \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N})}{\sin. \mathrm{I}},$$

$$\cos. i_{,,} = \frac{\cos. i' + \sin. i_{,,} \sin. \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N})}{\cos. \mathrm{I}},$$

unde sequitur

$$\frac{\cos. i' + \sin. i_{,,} \sin. \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N})}{\cos. \mathrm{I}} = \frac{\sin. i' \cos. (n' - \mathrm{N}) - \sin. i_{,,} \cos. \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N})}{\sin. \mathrm{I}},$$

$$\begin{aligned} &\cos. i' \sin. \mathrm{I} + \sin. i_{,,} \sin.^2 \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N}) = \sin. i' \cos. \mathrm{I} \cos. (n' - \mathrm{N}) - \sin. i_{,,} \cos.^2 \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N}) \\ &\sin. i_{,,} \sin.^2 \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N}) + \sin. i_{,,} \cos.^2 \mathrm{I} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N}) = \sin. i' \cos. \mathrm{I} \cos. (n' - \mathrm{N}) - \cos. i' \sin. \mathrm{I} \\ &\sin. i_{,,} \cos. (n_{,,} - \mathrm{N}) = \sin. i' \cos. \mathrm{I} \cos. (n' - \mathrm{N}) - \cos. i' \sin. \mathrm{I}. \end{aligned}$$

Hos valores, conjuncto eo aequationum (A), in aequationibus (γ) substituentes, habemus

$$\left.\begin{aligned} &\sin. i_{,} \sin (n_{,}-N) = \sin. i' \sin. (n'-N) - \sin. i' \cos. I \cos. (n'-N). mt + \cos. i' \sin. I. mt, \\ &\sin. i_{,} \cos. (n_{,}-N) = \sin. i' \cos. (n'-N) + \sin. i' \cos. I \sin. (n'-N). mt, \\ &\qquad \cos. i_{,} = \cos. i' - \sin. i' \sin. I \sin. (n'-N). mt. \end{aligned}\right\} (\delta)$$

duas priores aequationes per se dividentes, acquirimus

$$tang. (n_{,}-N) = \frac{\sin. i' \sin. (n'-N) - \sin. i' \cos. I \cos. (n'-N). mt + \cos. i' \sin. I. mt}{\sin. i' \cos. (n'-N) + \sin. i' \cos. I \sin. (n'-N). mt}.$$

divisionem nominatoris et denominatoris membri secundi efficientes, negligentesque terminos secundarum sublimiorumque potentiarum mt, habemus

$$tang. (n_{,}-N) = tang. (n'-N) - \cos. I. mt + \frac{cotg. i' \sin. I}{\cos. (n'-N)}. mt - \cos. I \, tang.^2 (n'-N). mt,$$

$$tang. (n_{,}-N) - tang. (n'-N) = -\cos. I. mt + \frac{cotg. i' \sin. I}{\cos. (n'-N)}. mt - \cos. I \, tang.^2 (n'-N). mt;$$

$$\frac{\sin. (n_{,}-n')}{\cos. (n_{,}-N) \cos. (n'-N)} = -\cos. I. mt - \cos. I \, tang.^2 (n'-N). mt + \frac{cotg. i' \sin. I}{\cos. (n'-N)}. mt;$$

$$\sin. (n_{,}-n') = -\cos. I \cos. (n_{,}-N) \cos. (n'-N). mt - \cos. I \sin. (n'-N) \cos. (n_{,}-N) \, tang. (n'-N). mt$$
$$+ cotg. i' \sin. I \cos. (n_{,}-N). mt.$$

quando ergo in secundo membro $n_{,} = n'$ ponimus, (quod facere licet, quia est formula approximationis,) tunc habemus

$$\sin. (n_{,}-n') = -\cos. I \cos.^2 (n'-N). mt - \cos. I \sin.^2 (n'-N). mt + \frac{\sin. I}{tang. i'} \cos. (n'-N). mt$$
$$= -\cos. I. mt + \frac{\sin. I}{tang. i'} \cos. (n'-N). mt,$$

igitur habemus post numerum t annorum post 1750,

$$n_{,} = n' - \left[\cos. I - \frac{tang. I}{tang. i'} \cos. (n'-N)\right] mt. \quad \ldots \ldots \quad (C)$$

Tertiam aequationem (A'), scilicet

$$\cos. i_{,} = \cos. i_{,,} \cos. I - \sin. i_{,,} \sin. I \cos. (n_{,,} - N - mt),$$

evolventes, nanciscimur

$$\cos. i_{,} = \cos. i_{,,} \cos. I - \sin. i_{,,} \sin. I \cos. (n_{,,}-N) \cos. mt - \sin. i_{,,} \sin. I \sin. (n_{,,}-N) \sin. mt;$$

$\cos. mt = 1$, atque $\sin. mt = mt$ ponentes, habemus

$$\cos. i_{,} = \cos. i_{,,} \cos. I - \sin. i_{,,} \sin. I \cos. (n_{,,}-N) - \sin. i_{,,} \sin. I \sin. (n_{,,}-N). mt$$

in eo, convenientes valores ex aequationibus (A) substituentes, acquirimus:

$$\cos. i_{,} = \cos. i' - \sin. i' \sin. I \sin. (n'-N). mt,$$

$$\cos. i_, - \cos. i' = - \sin. i' \sin. \mathrm{I} \sin. (n' - \mathrm{N}) . mt,$$
$$2 \sin. \tfrac{1}{2}(i_, + i') \sin. \tfrac{1}{2}(i_, - i') = \sin. i' \sin. \mathrm{I} \sin. (n' - \mathrm{N}) . mt,$$
$\tfrac{1}{2}(i_, + i') = i'$ ponentes, habemus
$$2 \sin. \tfrac{1}{2}(i_, - i' = \sin. \mathrm{I} \sin. (n' - \mathrm{N}) . mt,$$

ergo habemus quod ad numerum t annorum post 1750,

$$i_, = i' + \sin. \mathrm{I} \sin. (n' - \mathrm{N}) . mt. \quad \text{(C)}$$

Aequationes (A) et (A′) nobis ergo praebent has formulas

$$\left. \begin{aligned} n_, &= n' - [\cos \mathrm{I} - \frac{\sin. \mathrm{I}}{tang. i'} \cos. (n' - \mathrm{N})] . mt, \\ i_, &= i' + \sin. \mathrm{I} \sin. (n' - \mathrm{N}) . mt. \end{aligned} \right\} \text{(C)}$$

Quod ad aequationes

$$\left. \begin{aligned} \sin. i \sin. (n - \Pi - \psi_,) &= \sin. i_, \sin. (n_, - \Pi), \\ \sin. i \cos. (n - \Pi - \psi_,) &= - \cos. i_, \sin. \pi + \sin. i_, \cos. \pi \cos. (n_, - \Pi), \\ \cos. i &= \cos. i_, \cos. \pi + \sin. i_, \sin. \pi \cos. (n_, - \Pi), \end{aligned} \right\} \text{(B)}$$

dividamus secundam per primam, quo nanciscimur

$$cotg. (n - \Pi - \psi_,) = - \frac{cotg. i_, \sin. \pi}{\sin. (n_, - \Pi)} + \cos. \pi \; cotg. (n_, - \Pi),$$

secundae et sublimiores potentias π negligentes, habemus

$$cotg. (n - \Pi - \psi_,) = - \frac{cotg. i_,}{\sin. (n_, - \Pi)} . \pi + cotg. (n_, - \Pi),$$

$$cotg. (n - \Pi - \psi_,) - cotg. (n_, - \Pi) = - \frac{cotg. i_,}{\sin. (n_, - \Pi)} . \pi$$
$$= - \frac{\pi}{tang. i_, \sin. (n_, - \Pi)},$$

$$\frac{\sin. (n - n_, - \psi_,)}{\sin. (n - \Pi - \psi_,) \sin. (n_, - \Pi)} = \frac{\pi}{tang. i_, \sin. (n_, - \Pi)},$$

$$\sin. (n - n_, - \psi_,) = \frac{\pi \sin. (n - \Pi - \psi_,)}{tang. i_,},$$

in eo ponentes valorem

$$\sin. (n - \Pi - \psi_,) = \frac{\sin. i_,}{\sin. i} \sin. (n_, - \Pi) = \sin. (n_, - \Pi),$$

nobis est

$$\sin. (n - n_, - \psi_,) = \frac{\pi}{tang. i_,} . \sin. (n_, - \Pi),$$

arcumque loco ejus sinus sumendo

$$n = n_, + \psi_, + \frac{\pi}{tang.\, i_,}\, sin.\, (n_, - \Pi). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (D)$$

In ultima aequationum (B)

$$cos.\, i = cos.\, i_,\, cos.\, \pi + sin.\, i_,\, sin.\, \pi\, cos.\, (n_, - \Pi);$$

secundas et altiores potentias quod ad π negligentes, acquirimus

$$cos.\, i - cos.\, i_, = \pi\, sin.\, i_,\, cos.\, (n_, - \Pi),$$
$$2\, sin.\, \tfrac{1}{2}(i + i_,)\, sin.\, \tfrac{1}{2}(i - i_,) = -\, \pi\, sin.\, i_,\, cos.\, (n_, - \Pi);$$

$\frac{1}{2}(i + i_,) = i_,$ ponentes, arcumque loco ejus sinus sumentes, nanciscimur

$$i = i_, - \pi\, sin.\, i_,\, cos.\, (n_, - \Pi). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (D)$$

in aequationibus ultimo loco repertis, nempe

$$\left.\begin{aligned} n &= n_, + \psi_, + \frac{\pi}{tang.\, i_,}\, sin.\, (n_, - \Pi, \\ i &= i_, - \pi\, cos.\, (n_, - \Pi). \end{aligned}\right\} (D)$$

Valores

$$\left.\begin{aligned} n_, &= n' - \left[cos.\, \mathrm{I} - \frac{sin.\, \mathrm{I}}{tang.\, i_,}\, cos.\, (n' - \mathrm{N})\right] mt, \\ i_, &= i' + sin.\, \mathrm{I}\, sin.\, (n' - \mathrm{N})\, .\, mt. \end{aligned}\right\} (C)$$

substituentes, acquirimus

$$\left.\begin{aligned} n &= n' + \psi_, - \left[cos\ \mathrm{I} - \frac{sin.\, \mathrm{I}}{tang.\, i'}\, cos.\, (n' - \mathrm{N})\right] . mt + \frac{\pi}{tang\ i_,}\, sin.\, (n' - \Pi), \\ i &= i' + sin.\, \mathrm{I}\ sin.\, (n' - \mathrm{N})\, .\, mt - \pi\, cos.\, (n_, - \Pi). \end{aligned}\right\} (E)$$

Nunc Besselus, ut supra §. 23 vidimus, computando nonnullas observationes, quod ad approximativos valores n et i in annum 1833 acquirit

$$n = 167^\circ 21', \quad i = 28^\circ 9' 30'';$$

quos valores etiam hic assumemus, quoniam ratio non adest, cur illos denuo computemus, quippe qui inserviunt adjumento, quo ad magis accuratos eventus perveniamus; ex quibus ergo hic approximativi valores tandem evanescunt, ut eodem redeat, quemnam valorem hic ut fundamentum ponamus.

Bouvard in tabulis Saturni praebet

$$\mathrm{N} = 111^\circ 30' 13'',8, \quad \mathrm{I} = 2^\circ 29' 43'',63.$$

et secundum tabulas Regiomontanas, auctore Bessel pag. V, habemus

$$\Pi = 171^\circ 36' 10'', \quad \pi = +\, 0'',48892\, t, \quad \psi_, = 50'',211\, t.$$

hos valores in aequationes (E) transferentes, acquirimus.

$$\begin{array}{llll}
Log.cos.\,I = Log.cos.\,2^\circ 29' 43'',63 = 9.9995880 & Log.sin.\,I & = Log.sin.\,2^\circ 29' 43'',63 & = 8.6388894 \\
cos.\,I = 0,999052 & Log.cos.(n'-N) & = Log.cos.\,55\ \ 50\ \ 46\ ,2 & = 9.7492854 \\
\underline{0,045668} & & & \overline{8.3881748} \\
0,953384 & Log.tang.\,i & = Log.tang.\,28\ \ 9\ \ 30 & = \underline{9.7285643} \\
 & & & 8.6596105 \\
 & & & num. = 0,0456678
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
Log.\,\pi & = Log.\ 0'',48892\,t & = & 9.6892218 + Log.\,t \\
Log.(n'-\Pi) & = Log.sin. - 4^\circ 15' 10'' & = & \underline{8.8701512\,\mathrm{n.}} \\
 & & & 8.5593730\,\mathrm{n.} + Log.\,t \\
Log.\,tang.\,i & = Log.\,tang.\,28\ \ 9\ \ 30 & = & \underline{9.7285643} \\
 & & & 8.8308087\,\mathrm{n.} + Log.\,t \\
 & & num. = & -\ 0'',0677343\,t \\
 & & \psi = & \underline{\ \ 50\ ,2110000\,t} \\
 & & & 50'',1432657\,t
\end{array}$$

ergo

$$n = 167^\circ 21' 0'' + \delta n + (50'',143 - 0,95338\,m)\,(t-83).$$

et quod ad secundam formulam

$$\begin{array}{llll}
Log.\,sin.\,I & = Log.\,sin.\ \ 2^\circ 29' 43'',6 & = & 8.6388894 \\
Log.\,sin.\,(n'-N) & = Log.\,sin.\ \ 55\ \ 50\ \ 46\ ,2 & = & \underline{9.9177855} \\
 & & & 8.5566749 \\
 & & num. = & 0,036031 \\
Log.\,\pi & = Log.\ 0'',48892\,t & = & 9.6892378 + Log.\,t \\
Log.\,cos.\,(n'-\Pi) & = Log.\,cos. - 4^\circ 15' 10'' & = & \underline{9.9988026} \\
 & & & 9.6880404 + Log.\,t \\
 & & num. = & 0,487574\,t.
\end{array}$$

itaque

$$i = 28^\circ 9' 30'' + \delta i - (0,488 - 0,03603\,m)\,(t-83);$$

ita ut nunc duas aequationes

$$\left.\begin{array}{l}
n = 167^\circ 21'\ \ 0'' + \delta n + (50'',143 - 0,95338\,m)\,(t-83), \\
i = \ \ 28\ \ \ \ 9\ \ 30\ \ + \delta i - (\ 0\ ,488 - 0,03603\,m)\,(t-83),
\end{array}\right\}\ (F)$$

habeamus, quibus comparaturi simus observationes ad inveniendas incognitas quantitates δn, δi et m.

§. 28.

Nunc ad definiendas formulas transibimus, quae inserviunt determinandis aequationibus conditionalibus, quae profluunt ex angulo positionis p partis inferioris annuli.

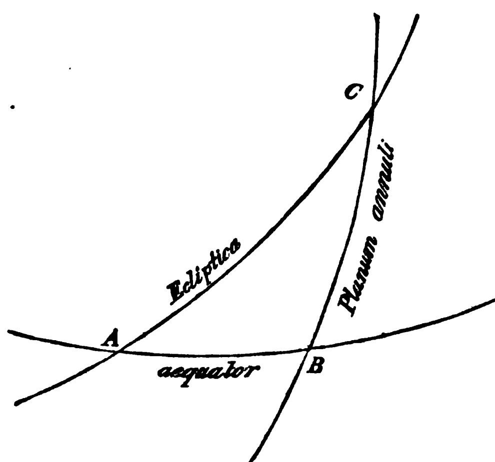
Sit ergo hunc in finem in Figura apposita RNB aequator terrae; O ejus polus; ANC planum annuli, P ejus polus; N locus adscendentis nodi annuli in aequatore; T locus terrae ex Saturno visus.

α et δ Adscensio recta et declinatio geocentrica Saturni;
N et I Longitudo adscendentis nodi atque inclinatio annuli in terrae aequatorem.
b Latitudo terrae supra plano annuli
p Angulus positionis partis annuli inferioris.
Triangulus sphaericus POT praebet:

$$\sin. \text{PT} \sin. \text{OPT} = \sin. \text{OP} \sin. \text{POT},$$
$$\sin. \text{PT} \cos. \text{OPT} = \cos. \text{OP} \sin. \text{OT} - \sin. \text{OP} \cos. \text{OT} \cos. \text{POT},$$
$$\cos. \text{PT} = \cos. \text{OP} \cos. \text{OT} + \sin. \text{OP} \sin. \text{OT} \cos. \text{POT}.$$

Quumque sit $\text{PT} = 90° - b$, $\text{OPT} = 90° - p$ et in hoc casu $-90° + p$ sive $\text{OPT} = p - 90°$, $\text{OP} = \text{I}$, $\text{POT} = \text{PON} + \text{NOT} = 90° +$ adscensio recta planeticentrica terrae $-$ N; $\alpha = 180° +$ adscensio recta planeticentrica terrae, POT $= \alpha - \text{N} - 90°$ atque $\text{OT} = 90° -$ declinatio planeticentrica terrae $= 90° + \delta$; igitur

$$\left.\begin{aligned} \cos. b \cos. p &= \sin. \text{I} \cos. (\alpha - \text{N}), \\ \cos. b \sin. p &= \cos. \text{I} \cos. \delta + \sin. \text{I} \sin. \delta \sin. (\alpha - \text{N}), \\ \sin. b &= -\cos. \text{I} \sin. \delta + \sin. \text{I} \cos. \delta \sin. (\alpha - \text{N}). \end{aligned}\right\} \text{(G)}$$



Sit porro in Figura apposita, AC eclipticae planum, AB aequatoris planum et BC annuli planum.

n longitudo adscendentis nodi annuli in ecliptica.

i inclinatio annuli ad eclipticam.

N longitudo adscendentis nodi annuli in aequatore.

I inclinatio annuli ad aequatorem.

ω inclinatio eclipticae ad aequatorem aut obliquitas eclipticae.

Tunc est

$$\mathrm{AC} = n, \quad \mathrm{AB} = \mathrm{N}, \quad \mathrm{BAC} = \omega;$$
$$\mathrm{ACB} = i, \quad \mathrm{ABC} = 180^\circ - \mathrm{I};$$

habemus ergo in triangulo sphaerico

$$\sin.\mathrm{ABC}\,\sin.\mathrm{AB} = \sin.\mathrm{ACB}\,\sin.\mathrm{AC},$$
$$\sin.\mathrm{ABC}\,\cos.\mathrm{AB} = \cos.\mathrm{ACB}\,\sin.\mathrm{BAC} + \sin.\mathrm{ACB}\,\cos.\mathrm{BAC}\,\cos.\mathrm{AC},$$
$$\cos.\mathrm{ABC} = -\cos.\mathrm{ACB}\,\cos.\mathrm{BAC} + \sin.\mathrm{ACB}\,\sin.\mathrm{BAC}\,\cos.\mathrm{AC}.$$

atque ergo

$$\left.\begin{aligned} \sin.\mathrm{I}\,\sin\,\mathrm{N} &= \sin.i\,\sin.n, \\ \sin.\mathrm{I}\,\cos.\mathrm{N} &= \cos.i\,\sin.\omega + \sin.i\,\cos.\omega\,\cos.n, \\ \cos.\mathrm{I} &= \cos.i\,\cos.\omega - \sin.i\,\sin.\omega\,\cos.n. \end{aligned}\right\} \text{(H)}$$

hos valores N et I in aequationibus (G) substituendo, Besselius eorum ope aequationum conditionalium obtinet, quas pag 87 memoravimus, quarum medium ex 131 observationibus, per 5 annos institutis, sequentem aequationem conditionalem praebet

$$0 = +27'',6 + 0,0452\,\delta n - 0,9647\,\delta\mathrm{N} + 0,25\,m.$$

§. 29.

Disparitionum reapparitionumque observationes, quas investigare potui, et quibus confidere aliqua certitudine possumus, pertinent ad seculum duodevicesimum et undevicesimum suntque sequentes, in quibus ipsius disparitionum reapparitionumque temporis rationem eorum, quae diximus §. 10, habebimus.

Observationes Anni 1701.

Secundum Dominici Cassini *filii*que observationes (1) ansae 7 Novembris tenuiter videri poterant; 11 ejusdem mensis observabant adhuc tenue earum vestigium; 25 die Saturnus totus rotundus conspiciebatur, transductus linea parva cum punctis, quae a latere occidentali cum aliquo punctulo extra planetam se extendebat; usque ad 20 diem Decembris non amplius observationum aliqua mentio fit, quando tempore vespertino hora 5 minutis 50 annulus clarissime videre erat; non cogitari potest intra hoc 25 dierum spatium omnino non observationes propter aëris tempestatem esse factas, ita ut de eo persuasum nobis esse possit, annulum 25 die Novembris ultima vice apparuisse.

Transibat terra per annuli planum, a facie australi illuminata ad obscuram annuli faciem borealem, quod temporis momentum putabimus fuisse:

1701. *die* 25 *Novembris hora* 6.

Observationes Anni 1714 et 1715.

Secundum Maraldium (2), die 12 Octobris 1714, occidentalis Saturni ansa adhuc conspici poterat, orientalis autem disparueret. Octobris 13 die aër nubibus erat obductus. Die 14 iterum Saturnus poterat observari, disparuerat autem annulus omnino.

Teste autem Cassini, qui ipsas, ipsius Maraldi manu scriptas observationes affert (3), 16 die Octobris vestigium adhuc leve annuli a parte sinistra vel ab occidente Saturni conspici poterat; ita ut Cassini statuat, demum inter 16 et 17 diem Octobris annulum disparuisse. Secundum *Mémoires anni* 1789, pag. 147, illae observationes fiebant die 16 Octobris hora $5\frac{1}{4}$ et 20 die omnino rotundus apparebat Saturnus; ita ut illud primae disparitionis tempus statuamus:

1714, *die* 16 *Octobris hora* 0.

Annuli planum per terrae centrum transibat, quo terra illuminatam australem annuli faciem relinquebat, transibatque ad faciem obscuram borealem.

Adhuc sine ansis planetam Maraldi (4) videbat anni 1715 primo Februarii die,

---

(1) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année 1789. pag. 145.
(2) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année 1715. pag. 12.
(3) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année 1774. pag. 8 et 9.
(4) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année 1789. pag. 147.

ab illo tempore usque ad 10 diem injuria aëris impediebat, quominus observaretur, illo autem 10 die hora vespertina 10 min. 50 Saturnum primo iterum videbat tenuissimis iisque debilissimis ansis. Transibat sol per annuli planum, incipiebatque ejus faciem borealem illuminare, quae ad terram erat conversa; ponemus hanc reapparitionem:

Anni 1715, *die* 10 *Februarii hora* 0.

Videbat MARALDI (1) anno 1715 die Martii mensis 18, per tubum opticum 34 pedum, valde tenues ansas, quae per tubum 17 pedum valde difficulter conspici poterant. Die 21 vix eas videre ei licebat, ita ut nihil certi dicere posset ob aëris infaustam conditionem. Die 22 hora vespertina $7\frac{1}{2}$ coelo sereno conspiciebat tantum per momentum vestigium adhuc leve esse annuli ad latus occidentale. Hora $10\frac{1}{2}$ vesperi diei 23 mensis, plane rotundum videbat Saturnum, ita ut hanc disparitionem posituri simus:

Anno 1715, *die* 23 *Martii hora* 0.

Hic iterum terra per annuli planum transibat a septentrione ad meridiem.

Anno 1715 diebus 10 et 11 Julii planetam adhuc annuli orbatum videbat MARALDI (2). Die 12, hora 9 vesperi, ansae se valde tenuiter ostendere incipiebant, quum sinistra vix, dextra autem perspicue videri posset. Die 14 hora vespertina $8\frac{3}{4}$ satis clare ansas conspiciebat, per tubum suum opticum 34 pedum, valde autem tenuiter 17 pedum tubo, ita ut possimus hanc reapparitionem ponere:

Anno 1715, *die* 12 *Julii hora* 9.

iterum terra per annuli planum, a facie boreali ad australem transeunte.

OBSERVATIONES ANNI 1730 ET 1731.

Situs licet Saturni in disparitionibus reapparitionibusque annuli valde favens esset, una duntaxat secundae reapparitionis a CASSINI instituta observatio extat. GODINUS videtur hisce observationibus operam dedisse, collectio autem ejus observationum periit.

Die 10 Februarii anni 1731 CASSINI nil adhuc de annulo conspicere poterat

(1) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année 1789. pag. 148.
(2) *Ibidem*, pag. 148. et année 1716. pag. 173.

tubo suo optico 34 pedum; die 15 videbat ansas tenuissimas (1). Transibat terra per annuli planum a meridie ad septentrionem. Hanc ponemus reapparitionem locum habuisse:

Anno 1731, *die* 15 *Februarii hora* 0.

Observationes Anno 1743 et 1744.

Erant anni illi propter Saturni situm quod attinet ad solem observationibus non commodi; nullae quidem adsunt observationes, quae nobis alicui esse possunt utilitati.

Heinsius illo tempore summam Saturni annulo operam dedit, quod apparet ex opusculo, cui titulus, *de Apparentiis annuli Saturni*, Lipsiae 1745; quod vero mihi non in manus venit. Propter diuturnitatem crepusculorum *Petropoli*, ubi observabat Heinsius, non potuit observare disparitiones reapparitionesque, quae mensibus Julio et Augusto locum habere debebant. Anni 1743 mense Decembri obtinebat disparitio, quam Heinsius definiebat 16 die Decembris V. S. hac autem uti non audemus.

Observationes Anno 1760.

Anno 1760, quando haec phaenomena iterum locum habere debebant, Saturni situs quod ad solem, initio anni erat valde incommodus, ita ut non accuratae adsint observationes; observavit tamen Le Monnier (2) die 12 Maji cum valde tenuibus ansis Saturnum, quae se matutino tempore die 19 ut puncta parva, rotunda colorataque monstrabant; non a vero aberremus, ponentes Le Monnier valde mediocribus usum fuisse tubis opticis; neque etiam convenit haec observatio cum disparitionum reapparitionumque serie, quae in quaque Saturni revolutione obtinet (3). Hanc reapparitionem, utpote quum sol per annuli planum transiret, ponemus:

Anno 1760, *die* 11 *Maji hora* 17.

Licet Saturni in fine illius anni situs commodus esset, phases quae tunc locum habere debuissent, non observatae sunt, fortasse ob incommodam aëris conditionem,

---

(1) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année 1789. pag. 149.
(2) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année 1774. pag. 15 et 16.
(3) Vid. §. 8.

Observationes Anni 1773 et 1774.

Notantur hi anni variis, quas celeberrimi Europae astronomi instituerunt, observationibus. Hae tamen valde inter se differunt, quod majori vel minori tuborum opticorum perfectioni, visus aciei, praesentiae lunae, crepusculo, aëris conditioni, situi interdum inferiori quod ad horizontem, etc. tribuendum est.

In prima disparitione, in qua observationes plurimum discrepant, Saturnus aderat in diliculo, ultimaeque observationes impediebantur a lunae lumine. In secunda disparitione magis faventes aderant occasiones, qua de re factum est, ut sibi magis conveniant observationes.

Secundum La Lande in *Mémoires de l'Academie royale des Sciences*, année 1774, pag. 84 — 89. et secundum Cassini filium in iisdem operibus année 1789, pag. 151 — 153, adsunt hae observationes:

I. *Prima Disparitio.*

Anno 1773, die 28 Septembris, hora matutina 5, La Lande et Bertholon *Batiris* (Besiers) per tubum opticum sedecim pedum, coelo sereno, ne particulum quidem annuli amplius videbant. Vidal *Tolosae* ansas adhuc conspiciebat. De Ratte *Monte Pessulano* (Montpellier) putabat se illas quoque videre.

Die 30 Septembris hora matutina 5, Le Monnier in *St. Sever* in *Normannia* per tubum achromaticum 10½ pedum, coelo valde sereno, Saturnum plane rotundum orbatumque ansis observabat; quod etiam *Princeps* De Conti se in *Isle-Adam* vidisse testatur.

Die 6 Octobris matutino tempore intra horam quintam et sextam, videbant Cassini Filius, *Abbas* De Rochon et Du Vaucel adhuc tenue vestigium annuli; Le Gentil solus planetam plane rotundum et sine ansis conspiciebat (1), D. Vincent Tofino de St. Miguel et D. Joseph Varela *Gadibus* (Cadix) adhuc videbant latus annuli occidentale, die autem 7 nil amplius observabant.

Hora matutina fere quinta die Octobris 10, Le Gentil et Du Vaucel Saturnum conspiciebant perfecte rotundum, *Abbas* tamen De Rochon sibi videbatur videre adhuc tenues annuli reliquias, quod tamen non certo asserere audet. Cassini defatigationum causa non observavit.

---

(1) Cassini *Filius*, cui adjuncti erant, le Gentil, *Abbas* de Rochon et du Vaucel observabant in Regia Parisiorum specula, quisque separatim, observationes suas secum invicem non communicantes.

Die 11 Octobris, MESSIER eum adhuc cum ansis a planeta disjunctis observabat *Parisiis*.

Die Octobris 12, ST. JACQUES DE SYLVABELLE *Massiliae* annulum adhuc videbat per SHORTII telescopium 6 pedum.

Die 16 Octobris, hora matutina 5 atque 26′ affirmat MAYER *Schwetzingae* prope *Manhemium*, se adhuc ansas vidisse per tubum achromaticum decem pedum.

II. *Prima reapparitio.*

Anno 1774, undecimo Januarii die, tempore matutino ab hora 4¼ usque ad horam 7, annulum rursus videbat MESSIER, ansis valde tenuibus et a planeta separatis.

Die 15 Januarii, observabant TOFINO et VARELA *Gadibus* (Cadix) primo annulum, huc usque aër nubibus obductus fuerat, si clarus fuisset, se illum jam die 9 potuisse videre conjiciebant.

Die Januarii 16 ille demum, valde tamen perspicue a DARQUIER *Tolosae* conspiciebatur; erat autem tam fortis illuminatus, ut crederet DARQUIER, se illum vel biduo ante conspicere potuisse, nisi pluvia, quae inde a die 10 perduraverat, impedivisset. Illo etiam 16 die Januarii vesperi hora 11¼ in specula regia *Parisiis* ansae tenuissimae observabantur a CASSINI, LE GENTIL, *Abbate* DE ROCHON et DU VAUCEL.

Die Januarii 19, a BERTHOLON *Batiris* (Besiers) videbatur primo, tubi optici 16 pedum ope.

LA LANDE MESSIERII observationes omnium optimas esse censet.

III. *Secunda disparitio.*

Vespertina hora 10 anni 1774, die 2 Aprilis, ansas adhuc distingere potuerunt CASSINI, LE GENTIL, *Abbas* DE ROCHON et DU VAUCEL, quamvis difficillime. Die 5, hora vespertina 10, coelo valde pulchro serenoque nullum amplius conspicere poterant annuli vestigium.

Eadem vespera annulus quoque adhuc, quamvis tenuissimus *Tolosae* a GARIPUY observabatur; duobus vel tribus sequentibus diebus in hac urbe aër nubibus obducebatur, ita ut affirmare non auderet, num hic ultimus, quo visibilis fuerit, dies habendus esset. Eadem vespere etiam LA LANDE eum videbat, sed tam tenue, ut illum ipsi ultimam apparitionem haberet. Eadem vespera hora 7 *Tolosae* conspiciebat DARQUIER ansas adhuc visibiles, quamquam debilissimas;

hora $12\frac{1}{2}$ lumen visibiliter diminutum erat, ita ut non putaret se illas die 3 vesperi revisurum esse. TOFINO *Gadibus* eadem vespera hora 7 etiam adhuc ansas observabat; ut etiam diebus 3 et 4, aliqua tamen cum difficultate. Die 5 nihil omnino amplius conspiciebat.

Die 10 Aprilis DE RATTE et POITEVIN *Monte Pessulano* (Montpellier) eum adhuc a se videri opinabantur; die 11 nil amplius videre poterant.

IV. *Secunda reapparitio.*

Die 30 Julii anni 1774, vespere intra horam 9 et 10, D. VINCENT TOFINO ope telescopii sui 48 pollicum longitudinis foci, quum aër esset valde serenus, annulum observabat; die 1 Julii eum iterum per suum tubum achromaticum videbat.

Putabat WOLLASTON die 30 Junii etiam ansarum unam tantum se conspicere, 2 die Julii erat ei persuasum, se totum annulum ut luminis filum conspexisse, ope achromatici sui tubi pedum $3\frac{1}{2}$; eum melius videbat cum centies quam centies et quinquaquies amplificatum (1).

Die 1 Julii, hora vespertina 9 Saturnus a CASSINI ansis suis instructus conspiciebatur, quamvis adhuc valde tenuis. MESSIER *Parisiis* primo Julii occidentalem duntaxat ansam, ope tubi achromatici conspiciebat. Videbat DARQUIER *Tolosae* illo die hora vespertina $8\frac{1}{2}$ ambas ansas aequalis et longitudinis et luminis.

DE RATTE *Monte Pessulano* putabat se 7 die Julii eum primo videre; die 12 demum plane ejus rei certus fiebat; hoc profecto est nimis sero.

Quatuor phasium accuratissima tempora, diem 9 Octobris, 11 Januarii, 3 Aprilis et 1 Julii habet LA LANDE.

Maxime fusas phaenomenorum Saturni annuli observationes a MESSIERIO reperimus notatas; quam ob causam etiam eas adhibebimus, quippe quae indicia prae se ferunt magnae diligentiae. Saturnum accurato et indefesso studio inde a d. 19 Martii 1773 usque ad 2 Julii 1774 in specula marina *Parisiis* observavit; quas observationes in *Nouveaux Mémoires de Berlin*, anni 1776, pag. 312—328, valde copiose describit; cui tractatu addidit chartam phasium Saturni annuli, quales se, durantibus illius observationibus, ostendebant.

---

(1) *Phil. Transact.*, 1775. pag. 295.

Ad has observationes instituendas usus est quatuor instrumentis; nempe: eximio achromatico **Dollondi** tubo pedum $3\frac{1}{2}$ cum tribus lentibus objectivis 40 linearum aperturis; quae 115^{ies}, 144^{ies} et 240^{ies} objecta amplificabant. Secundum erat ejusdem generis a **De l'Etang** *Parisiis* constructum, quod ab omni parte non tam bonum quam primum erat. Tertius similiter ejusdem generis, cujus foci longitudo trium pedum, apertura 37 linearum et quae objecta 80^{ies} atque 150^{ies} amplificabant, confectum ab eodem **De l'Etang** *Parisiis*. Quartum eximium Gregorianum telescopium 30 pollicum longitudinis foci, quum speculum magnum diametrum 6 pollicum erat, et quae objecta 104 et 140 amplificabant.

Observationes per quatuor memorabiles phases sequentes sunt:

I. *Quod ad primam disparitionem.*

Ope tubi **De l'Etang**, die 6 Octobris 1773, valde mane, aëre lucido, Saturnum videbat primo e radiis solaribus prodeuntem, eumque adhuc ambabus a partibus conspiciebat annulo instructum, licet valde debiliter illuminatum. Die 11 Octobris hora matutina fere quinta conspiciebat, coelo valde claro, per 115 amplificationem tubi Dollondiani, adhuc maxime tenue filum annuli, quod saepe ex oculis amittebat; sequente die eodem tubo eademque amplificatione nullum amplius annuli vestigium poterat videre; sic etiam die proximo 13, attamen annuli umbram in planetae disco optime distinguere poterat. Ita ut assumere nobis liceat annulum disparuisse:

Anni 1773, *die* 11 *Octobris hora matutina* 6.

terra per annuli planum a facie illuminata australi ad obscuram borealem transeunte.

II. *Quod ad primam reapparitionem.*

Die 4 Januarii 1774, valde mane, coelo sereno tubum Dollondianum cum 115 amplificatione dirigebat ad planetam Saturnum, deque annulo nihil adhuc videbat. Inde a quarto die usque ad 10 aër noctu nubibus obductus erat. Quum die 11 matutino tempore aër valde clarus erat, per eundem tubum eademque amplificatione, ab ambabus planetae partibus ansas observabat, quae ei fortuna contingebat ab hora $4\frac{1}{2}$ usque ad septimam, aëre maxime illi favente, attamen ansae planetae separatae erant; postridie hora 5 eas iterum videbat.

Ita quod ad reapparitionem ponere possumus:

Anni 1774, *diem* 10 *Januarii hora* 12.

nunc transibat sol per annuli planum, a facie australi ad borealem.

III. *Quod ad secundam disparitionem.*

Anni 1774, secundo Aprilis die, quum esset aër serenus, saturnusque in meridiani propinquitate, adhuc ansas videbat, tubi optici Dollondiani ope, amplificationis 115, tubi De l'Etang amplificationis 120, et 104 amplificationis telescopii Gregoriani.

Die Aprilis 3, inter vespertinam horam 9¾ et 10¼, iterum conspiciebatur Saturnus, quum fere in meridiano erat, tribus memoratis instrumentis conspiciebatur; ansae multum de luce sua amiserant; tubi Dollondiani ope conspici fere non poterant, et illo De l'Etangii amplificatione 120 non poterant observari.

Die 4 vespere, aër non favebat observationibus, ita ut non certo dicere auderet, utrum disparuerint ansae, nec ne.

Die 5, quum aër valde clarus esset, magna attentione Saturnus trium instrumentorum ope inquirebatur; durabant illae observationes ab hora 7½ usque ad horam 9 et ab hora 10 usque ad 10½, in quo ultimo tempore Saturnus meridianum transibat. Quantamcunque operam tribus illis instrumentis adhiberet, ne minutissimam quidem annuli particulam amplius conspicere poterat; ita ut inter dem 3 et 5 disparuerit; quumque die 3 jam valde tenuis esset, omnia nos movent, ut cogitemus, eum die 4 disparuisse, quod ergo tempus ponimus:

Die 4 *Aprilis anni* 1774, *hora vespertina* 9.

transibat terra per annuli planum a facie boreali ad australem.

IV *Quod ad secundam reapparitionem.*

Die 30 Junii anni 1774, vespere intra horam 9 et 10, tubum suum opticum et telescopium ad Saturnum dirigens, ansas nondum videbat, non autem valde observationibus favebatur ob Saturni inferiorem situm quod ad horizontem, multasque nebulas, quibus aër gravidus erat; non clarus erat Saturnus acuteque terminatus; attamen satellitem ad planetae orientalem partem in directione umbrae annuli videbat, qui tamen satis habebat luminis

Quum die 1 Julii tempore vespertino intra horam 9 et 10, aër omnino clarus

esset, neque luna oriretur, magna cum molestia orientalem ansam annuli videbat, debilissimo lumine praeditam, quo fiebat, ut eum saepe ex oculis amitteret, utens tubo telescopioque cum amplificationibus 104, 115, 140 et 144 quem utrumlibet adhibebet laborem, non fieri poterat, ut occidentalem videret ansam; umbram annuli in planetae discum projectam optime distinguere poterat; ope duorum De l'Etangii tuborum opticorum nullam prorsus annuli partem adhuc conspicere ipsi licebat.

Die 2 Julii vespere ab hora inde 9 usque ad $10\frac{1}{4}$, aëre sereno et crepusculo commodo, nullam adhuc partem annuli videre poterat ope duorum instrumentorum De l'Etangii sed ope tubi Dollondiani et telescopii Gregoriani utramque ansam fere ejusdem longitudinis ejusdemque luminis cernebat, ambabus a planeta disjunctis; cum amplificatione 104 et 115 melius eas conspicere poterat, quam cum 140 et 144 amplificationibus.

Ita ut hanc reapparitionem possimus considerare obtinuisse:

Anno 1774, *primo die Julii hora vespertina* 9.

per annuli planum a meridie ad septentrionem transibat terra.

Observationes Anni 1789 et 1790.

Observationum disparitionum reapparitionumque rationen durante hac periodo reddit Mechain, quas ille colligere potuit, in *Connaissance des tems pour l'an* 1792, pag. 344 — 348; quibus nostras, quas indagare potuimus, addemus (1).

I. *Prima disparitio.*

Quin aër *Parisiis* inde a d. 21 Aprilis anni 1789 usque ad 6 Maji sequentem continuo nubibus obtectus erat, hinc illo, ipsum disparitionis tempus non potuerant observare. Die 21 Aprilis in diluculo Messier adhuc videbat annulum; die 6 Maji, cum primum observare ei liceret, nullum annuli vestigium conspicere poterat utens duobus achromaticis tubis pedum $3\frac{1}{2}$ longitudinis foci; sic etiam postridie 7 Maji; ita ut hic nullum hujus observationis usum habeamus.

Plus certitudinis habent observationes Flaugerguesii *Vivianoni* (Viviers) quas

---

(1) Illae disparitiones apud Herschelium locum non habuerant; parvum lumen, quod annuli margo reflectebat, semper adhuc visibile fuit, ope telescopii ejus 40 et quidem ejus 20 pedum.

cum Mechainio communicavit (1) atque ita se habent: Die 1 Maji tempore matutino inde ab hora 3 usque ad horam $4\frac{1}{4}$, ope boni telescopii Gregoriani 16 pollicum foci distantiae annulum videbat adhuc ab utraque planetae parte. Diebus 2, 3 et 4 impediebatur, quo minus nubilo coelo observaret planetam.

Die 5 tempore matutino ab hora $3\frac{1}{2}$ usque ad horam $4\frac{1}{2}$ ansae apparebant ipsi tantummodo ut duae parvae, tenuissimae rectaeque lineae, aliquantum visibiliores, ubi se cum planeta conjungebant; occidentalis videbatur esse aliquando longior et clarior orientali, attamen tum erant debiles, ut saepe disparerent, solum motus nebularum causa.

Die 6 iterum nubibus impediebatur.

Die 7 magna cum attentione inde ab hora $3\frac{3}{4}$ usque ad horam 4 tempore matutino observavit, nullum autem omnino poterat annuli vestigium detegere.

Igitur disparitionem annuli habere possumus:

Anni 1789, *die* 5 *Maji hora matutina* 6.

Transibat terra per annuli planum a facie boreali ad australem.

II. *Prima reapparitio.*

Quamvis *Eques* Angosi in portu *Conti* apud *Oristagni* in *Sardinia* vehementer contendit, se optime ansam orientalem 24 die Augusti vidisse; tamen Mechain *Lutetiae* ne minimum quidem annuli vestigium poterat 27 die conspicere; noctu inter 27 et 28 diem se agnoscere putabat sensim luminis vestigium quam maxime debilem ab orientali planetae parte, attamen valde dubium. Die 28 hora vespertina $8\frac{1}{2}$, ansam orientalem tum videbat, tum autem minus; hora 10 non dubium erat amplius; hora 12 adhuc clariorem videbat detegebatque etiam ansam occidentalem. Post lunae occasum et usque ad horam $1\frac{1}{2}$ post noctem mediam ambas ansas quam maxime perspicue videbat, attamen ut lineam tenuissimam illuminatam. Die 29 majore cum perspicuitate ansam utramque observabat (2).

Etiam Messier detegebat orientalem ansam die 28, utramque videbat die 29

---

(1) Videatur etiam Bode, *Astr. Jahrbuch*, 1793, pag. 121. *Nova acta Petropolitana*, Tom. VIII. pag. 29. *et Connaissance des tems pour l'an* 1792, pag. 345.

(2) *Nova acta Petropolitana*, Tom. VIII. pag. 29. *Connaissance des tems pour l'an* 1792. Bode, *Astr. Jahrb.* 1793, pag. 121.

hora vespertina 10. In specula utraque ansa etiam non ante diem 29 conspiciebantur.

MASKELYN *Grenovici* ex observationibus suis conclusit, annulum iterum apparuisse die 28: hora nocturna undecima, per tubum achromaticum pedum 5.

BERNARDUS in *Trans* apud *Draguignon* conjiciebat reapparitionem locum habuisse die 27 vel 28, poteratque ambas ansas, die 29 optime distingere.

Die 27 conjiciebant *Mediolani* aliquot luminantia puncta in directione annuli vidisse; die autem 28 de reapparitione non dubitabatur.

Die 29 ambae ansae a ST. JACQUES DE SYLVABELLE et THULIS *Massiliae* et a CAGNOLI *Veronae* visae erant. Quo die a SCHRÖTERO nondum erant conspicatae.

BODE *Berolini* primo annulum videbat, die 30 hora nocturna 11, ut etiam *Eques* ENGLEFIELD *Londini*.

Hisce omnibus simul sumtis, verosimile reapparitionis tempus patet fuisse:

Anni 1789, *inter* 27 *et* 28 *diem Augusti*, *media nocte*.

Per planum annuli transibat terra a meridie ad septemtrionem.

III. *Secunda Disparitio.*

MASKELYN *Grenovici* observabat inde a 1 Octobris die definiebatque annuli disparitionem, die 3 versus horam 12 et 7 minuta per achromaticum tubum quinque pedum et fere hora una ante ejusmodi tubo pedum $3\frac{1}{2}$.

Die 2 Octobris BODE *Berolini* ne minutissimam quidem particulam annuli observare poterat, oberat autem illi plena luna; die 6 planetam plane rotundum sine annulo videbat (1).

Die 3 Octobris conspiciebant ST. JACQUES DE SYLVABELLE et THULIS ope telescopii SHORTII 6 pedum nil praeter ansam occidentalem; die 4 ne tenuissimum quidem annuli vestigium iis observare licebat.

SCHRÖTER die ipso 4 Octobris amplificationibus ad id usus maxime idoneis telescopii sui ne minimum quidem annuli vestigium poterat agnoscere; sic etiam diebus 5 et 7; quamquam tres satellites perspicue distinguere poterat (2).

ST. JAQUES DE SILVABELLE die 2 Octobris adhuc annulum videbat, licet vix sensibilem. Ansam occidentalem adhuc die 3 conspiciebat, quae vix observari

---

(1) BODE, *Astr. Jahrb.* 1793. pag. 235.
(2) BODE, *Astr. Jahrb.* 1793. pag. 203 et 204.

poterat. Die 4 coelo satis claro nullum ejus vestigium observabat. Aër nebulosus die 5 erat (1).

Parisiis Mechain diebus 4 et 5 ansas valde obscure videbat, diebus quinque sequentibus aëris intemperie impediebatur, quominus observaret, praeter punctulum temporis clarum die 7, quo utebatur, quando leve adhuc annuli vestigium conspicabatur. Clarescente aëre die 10 hora vespertina 10, in specula conjiciebant parvas adhuc ansarum reliquias adesse. Messier quoque orientalem ansam adesse conjiciebat tubi ope achromatici pedum $3\frac{1}{2}$; ope autem tuborum achromaticorum pedum 9 et 16, die 11 nil amplius videbat. A Mechainio tubos pedum 5 et 11 achromaticos adhibente, ne minimum quidem annuli vestigium observabatur.

Ansae quoque ultimo observabantur, die 10 a Bernardo *Transiae*, a *Comite* Bruhlio *Londini* et a Buggeo *Hafniae*.

Denique adhuc observationis a Darquierio *Tolosae* institutae mentio fit, secundum quam die 15 vel 16 annulus disparuisse fertur; quae mihi observatio valde dubia videtur, ita ut primas sequamur, quae omnes inter se bene conveniunt, ita ut ponamus annulum disparuisse:

Anni 1789, *diem inter* 10 *et* 11 *Octobris hora nocturna* 12.

Transibat sol per annuli planum a facie boreali ad faciem australem.

IV. *Secunda reapparitio.*

Die Januarii 29 anni 1790 vespera Messierius ope tubi achromatici $3\frac{1}{2}$ pedum foci longitudinis certus fiebat se orientalem ansam, vidisse; conjiciebat etiam se occidentalem ansam cernere; erat aër serenus, ipse autem magnus fulgor lunae officiebat. Mala aëris temperies, tunc succedens eum impediebat, quo minus ante diem 19 Februarii conspicaretur Saturnum.

Ipso illo die 29 Jan. St. Jacques de Sylvabelle *Massiliae* maxima amplificatione telescopii sui sex pedum videbat tenue filum lucis, nihil autem certi de eo affirmare poterat. Die 30 noctu annulum videre incipiebat. Die 31 eum ab utraque planetae parte perspicue videbat. Die Februarii 1 annulus se formare coepit (2).

---

(1) Bode, *Astr. Jahrb.* 1795. pag. 244.
(2) Bode, *Astr. Jahrb.* 1795. pag. 224.

Tempus reapparitionis die 29 Januarii hora vespertina 6¾ tradit FLAUGERGUES (1).

Die 30 a CARROCHEZ *Passii* videbatur telescopio 22 pedum. *Pisae* a SLOPIO telescopii Shortiani ope, quod objecta ducentios amplificabat. MASKELYN qui eum die 31 perspicue *Grenovici* conspiciebat ope tuborum achromaticorum pedum 5 et 3½, conjicit, se eum die 30 observaturum fuisse, si aër valde clarus fuisset.

Die 31 SCHRÖTER *Lilienthalae* primo videbat ope telescopii HERSCHELII 7 pedum et amplificatione 95 in crepusculo annulum, ut valde tenuissimam luminis lineam ab utraque planetae parte, quum esset pars occidentalis multo magis perspicua, orientali. Diebus 29 et 30 coelum ipsi nubilatum erat (2).

Videbatur *Parisiis* annulus a CASSINI, die 1 Februarii; die 2 a BERNARDO in *Provincia;* die 4 a FLAUGERGUESIO *Vivarii* ut et BODE *Berolini* (3).

Possimus ergo secundam ponere reapparitionem:

Anni 1790, *die* 29 *Januarii hora vespertina* 6.

Transibat per planum annuli terra a meridie ad septemtrionem.

OBSERVATIONES ANNIS 1802 ET 1803 INSTITUTAE.

I. *Prima disparitio.*

Videbat MECHAIN die 15 vel 16 Decembris anni 1802, ope tubi achromatici optimi quinque pedum, annulum adhuc ut maxime angustam et tenuiter illuminatam lineam, unde judicabat, brevi fore ut tubo suo dispareret. Die 20 Decembris inde ab hora matutina 3 usque ad ortem aurorae Saturnum observabat maxima diligentia, ipsi autem non licebat minima annuli vestigia conspicere, quamvis interdum putaret; ita ut annuli disparitionem die 19 vel ad summum die 20 mane, convenienter suo tubo assumeret (4).

Unde fit, ut illam possimus ponere disparitionem:

Anni 1802, *die* 19 *Decembris hora matutina* 6.

Per annuli planum transibat terra a meridie ad septemtrionem.

---

(1) *Nova acta Petropolitana*, Tom. VIII. pag. 29.
(2) BODE, *Astron. Jahrb.* 1793. pag. 204.
(3) BODE, *Astr. Jahrb.* 179 . pag. 112.
(4) BODE, *Astr. Jahrb.* 1806. pag. 132 et 133. *Mon. Correspond.* VIII. pag. 188.

II. *Prima reapparitio.*

Lilienthalae intuebatur die 4 Januarii anni 1803 hora matutina 2, cum amplificatione 136 reflectoris sui 13 pedum HARDINGIUS occidentalem annuli ansam, quum ne minimum quidem orientalis ansae vestigium investigare posset. Die Januarii 11 noctu, inde ab hora 11 cum 7 minutis usque ad horam 12 et 30 minuta SCHRÖTER et LÜDEN *Lilienthalae* telescopio 7 pedum Herscheliano, non obstante lunae luce, annulum ab utraque planetae parte conspiciebant (1).

Occidentalem annuli partem die 11 Januarii hora matutina 2¼ MECHAIN conspicabatur, quam maxime autem debilem, ita ut nubium causa subinde dispareret; sed aurora oriente videbat quoque orientalem ansam. Diebus 13 et 15 horis matutinis 2 et 3, ambas annuli partes melius magisque perspicue intuebatur (2).

Hic ergo debemus sumere primam reapparionem fuisse

die 4 Januarii hora matutina 2, *anni* 1803.

Terra transibat per annuli planum a septemtrione ad meridiem.

III. *Secunda disparitio.*

Inde a mensis Maji fine anni 1803 TRIESNECKER *Viennae*, quotidie Saturnum observabat, quoad aëris temperies pateretur. Ultima vice annulum die 15 Junii hora vespertina 10 conspiciebat; ex quotidiana lucis diminutione concludebat, illum post duas dies ante oculos dispariturum, quod ipso judice etiam locum habere debuit; quum propter aëris malam temperiem ante 20 diem observare non posset, illo die ne minimum quidem annuli vestigium ipsi amplius investigare licebat, quamvis ejus umbra in Saturni disco perspicue conspicaretur (3).

SCHRÖTER *Lilienthalae* videbat ope reflectoris 13 pedum et 136 amplificatione, die 16 Junii hora vespertina 9 et 55 min. T. V. orientalem ansam disparuisse omnino, supererat duntaxat occidentalis ansa (4).

Ita ut hanc disparitionem ponamus

Anno 1803 *hora ipsa nocturna media inter* 16 *et* 17 *Junii.*

---

(1) SCHRÖTER, *Kronogr. Fragmente*, pag. 55, 56 et 208.
(2) BODE, *Astr. Jahrb.* 1806. pag. 133.
(3) BODE, *Astr. Jahrb.* 1807. pag. 148.
(4) SCHRÖTER, *Kron. Fragm.* pag. 209.

Transibat sol per annuli planum a meridie ad septemtrionem.

IV. *Secunda reapparitio.*

Secundam reapparitionem, quae medio Augusto locum habere debuisset, observare non potuerunt, ideo quod brevi ante solem occidebat Saturnus.

Flaugergues *Vivarii* eventus suarum observationum sic tradit (1):

I. Disparitio, 1802 Dec. 15 hora matutina 2.
II. Reapparitio, 1803 Jan. 11 hora matutina $6\frac{1}{2}$.
III. Disparitio, 1803 Junii 14 hora vespertina 9.

Observationes Anni 1819.

Annus 1819, in quo iterum illa phaenomena obtinere debuissent, observationibus valde incommodus erat; mense enim Martio transibat sol per annuli planum, fere eodem tempore, quo Saturnus cum sole in conjunctione erat. Neque reapparitionem observare poterant, quoniam Saturnus adhuc in radiis solaribus erat. Postea neque terra neque sol rursus per annuli planum transibat.

Observationes Annorum 1832 et 1833.

Quum ex computatione Saturni annulus exeunte mense Septembri vel ineunte Octobri 1832 deberet disparere, quoniam terra per annuli planum transeundum erat; illam tamen disparitionem non potuerunt observare, quoniam in radiis solaribus erat Saturnus.

Die 12 Decembris 1832 Bessel omnes invitabat astronomos, qui solis per annuli planum transitum, jam factum observassent, attendereque vellent ad hinc succedentia ejusmodi phaenomena, ut immediatos limites a se observatos, in *Astronomische Nachrichten* vulgarent. Addit, unum jam limitem alicujus momenti pretii alicujus esse posse, quoniam ita, conjunctis observationibus in pluribus speculis, tempus observationis deinceps posset definiri, inprimisque quum phases anni tempestate locum habeant, cujus multa incommoda expertus erat in observando solis per annuli planum transitu (2).

Hinc sequentes observationes missae sunt:

Bianchi *Cattajoni* noctu inter 19 et 20 Octobris diem Saturnum observavit nullo

---

(1) *Connaissance des tems An* XIV (1806). pag. 431.

(2) *Astronom. Nachr.* N°. 236.

tamen annuli vestigium detecto (1). Hac autem observatione uti non possumus, quoniam secundum omnem verisimilitudinem annulus jam prius disparuerat.

Prima reapparitio.

Quando per annuli planum sol transiturus erat, propter aëris intemperiem a paucissimis astronomis atque insuper vitiose observatum est. Bessel *Regiomontani*, 28 Novembris die anni 1832 annuli expertem videbat Saturnum, neque ipsi licebat, quadam excepta quarta horae parte, die 7 Decembris, Saturnum ante 12 Decembris diem conspicere. Die 7 nullum adhuc annuli vestigium detegere poterat, sed sicut ipse testatur, tam inconstans erat aër et diluculum tam clarum, ut vestigium quidem annuli potuerit fuisse, quod vero a se non observatum sit. Die 12 annulus apparebat ab ambabus partibus planetae aeque lucidus (2).

Secundum Schwabe *Dessaviae* erat primo Decembris die, quum Saturnum ab hora inde matutina $4\frac{1}{2}$ usque ad $7\frac{1}{2}$ observavisset, tubo Frauenhoferiano, amplificationibus 216, 288 et 324, aëris temperie satis commoda, annulo adhuc invisibili, attamen in directione ansae orientalis punctum subtile lucis certo putabat se detegere. Observationes ejus usque ad diem 12 interrumpebantur, quum annulum perspicue videret, quem etiam tubo Frauenhoferiano $3\frac{1}{2}$ pedum et amplificationibus 126 et 168 agnoscere poterat (3).

Videmus ergo annulum rursus apparuisse inter primum et 12 diem Decembris 1832, caremus autem hic die certo; ergo neque his observationibus uti possumus.

Secunda disparitio.

Quum terra per annuli planum, a septemtrione ad meridiem transiret, sequentes praebebat observationes:

Valz *Nemausi* (Nimes) die 19 Aprilis 1833 diligenter Saturnum observare coepit Dollondiani tubi ope $3\frac{1}{2}$ pollicum aperturae et amplificationibus 80 et 150. Die 23 optime annulum distinguere poterat, 80 amplificatione, non autem 150 amplificatione. Aër erat die 24 nubibus obductus. Die 25 ventus vehemens impediebat, quominus certam annuli praesentiam agnosceret, licet leviter illum suspicaretur,

---

(1) *Astr. Nachr.* N°. 249. pag. 149.
(2) *Astr. Nachr.* N°. 236. pag. 323 et 324.
(3) *Astr. Nachr.* N°. 239. pag. 383.

tamen certi quid statuere non audet. Diebus 26 et 27 aër nubibus obductus erat. Die 28, quamquam aër aliquatenus obtectus erat, poterat tamen observare Saturnum, quum tamen nullum annuli vestigium conspiceret. Die 29 sequentibusque aër purus Saturnusque omnino annulo orbatus (1).

Mädler *Anconae* adhuc die 25 Aprilis annulum certo intuebatur, tamen tam subtilem, ut eum saepe ex oculis amitteret. Die 26 nil amplius videbat (2).

Schwabe *Dessaviae* observabat die 22 Aprilis, hora vespertina 9 ope tubi sui optici sex pedum et 216 amplificatione ansas valde tenues, quae in magnis aëris motibus disparebant. Die 25 hora vespertina 9 annulum sua 144 amplificatione videbat velut duas valde subtiles obtusasque lineas, quarum occidentalis perspicua magis et obtusior, orientalis contra minus clara interruptaque erat; coeli temperies non valde commoda erat propter vehementes aëris motus. Die 27 hora vespertina 9 eadem amplificatione nonobstantibus vehementibus iisque continuis aëris motibus adhuc ansarum vestigium videbat, quumque occidentalis adhuc clara uniformisque, orientalis autem visu difficilis esset (3).

Petersen in specula *Altonae* tubi Frauenhoferiani ope quatuor pedum foci longitudinis, 37 lineis aperturae et 144 amplificatione, die 25 Aprilis adhuc perspicue ab utraque planetae parte annulum conspicatus est; ansam orientalem semper clariorem vidit occidentali, quod contrarium Schwabei est. Die 26 hora nocturna media 12 ipsi fere disparuerat ansa occidentalis, adhuc aderat orientalis. Die 28 mensis ejusdem nubilatus aër erat. Die 29 nullum ejus vestigium amplius detegere potuit; erat quidem aër nebulosus, planeta autem quietus perspicueque videri poterat; animadvertendum etiam est, lunam $7^\circ\frac{1}{2}$ a planeta distare, quumque erat duos dies post primum quadrantem lunae (4).

Von Boguslawski in regia *Breslaviae* specula tubo quatuor pedum Frauenhoferiano et 96 et 144 amplificationibus, die 22 Aprilis, hora ipsa nocturna 12 adhuc debilissimum annuli vestigium videbat. Die 23 aër nubibus obductus erat. Die 24 observabat tubo Frauenhoferiano $4\frac{1}{2}$ pedum et 162 amplificatione, hora vespertina 10 et 30 min. valde tenuem annuli lineam. Die Aprilis 25 hora ipsa nocturna 12, 162 amplificatione adhuc ab utraque planetae parte annulum ut subtilissimam acutissimamque lineam videbat se extendere. Die

---

(1) *Astr. Nachr.* N°. 243. pag. 41.
(2) *Astr. Nachr.* N°. 247. pag. 118.
(3) *Astr. Nachr. Beilage zu* N°. 249. pag 153.
(4) *Astr. Nachr. Beilage zu* N°. 249.

26 Aprilis, hora vespertina 10 et 30 min. 162 amplificatione adhuc manifestum se faciebat debile vestigium ambarum annuli ansarum. Die 27 hora vespertina 10 cum 30 min. et 11 cum 15. min., coelo eximio claro, sed in propinquitate lunae, 162, 243 et 108 amplificationibus, ne minimum quidem annuli vestigium ab eo detectum est (1).

Bianchi et Bernhardi *Catajonum* disparitionem die 26 Aprilis definiunt, hora vespertina 10½. Utebatur Bianchi tubo Frauenhoferiano quinque pedum, 103 amplificatione, applicato circulo meridiano Reichenbachii; Bernhardique Bianchio adjunctus telescopium Amicii adhibebat pedum 7¾ (mensura Parisina) foci longitudinis, aperturae 6¾ pollicum et amplificatione 372 (2).

Ultimo loco Besselus annulum vidit 23 die Aprilis, erat autem aër *Regiomontani* inde a 23 usque ad 30 Aprilis diem continuo nubibus obductus, 30que die, quod per se patet, disparuerat (3).

Unde sequitur, ut hanc possimus disparitionem ponere:

Anni 1833, *die* 27 *Aprilis hora vespertina* 9.

Per annuli planum a facie boreali ad australem transibat terra.

Secunda reapparitio.

Hujus reapparitionis, quippe quum per annuli planum transibat terra, has habemus observationes:

Von Boguslawski *Breslaviae*, diebus 10 et 11 Junii semper vespertina hora 10 et 45 min., 72 et 162 amplificationibus nullum adhuc annuli vestigium videbat. Dies 12 mensis pluviosus erat. Die 13 vespertina hora 10 et 32 min. conspicatus est 162 amplificatione eximie debile annuli vestigium, tam debile, inquit, ut, licet aër 24 horis ante etiam fuisset idoneus, hujus certo nihil videre potuerit; nunc autem videbat quamvis tenuem annulum ab utraque planetae parte. Diebus 14 et 15 erant pluviosi obscurique. Sequentibus diebus ipsi valde perspicuus erat (4).

Bianchi *Cattajonum* inde a die 21 Maji nullam vesperam, quum aëris temperie faveret, omisit qua non observaret Saturnum ope telescopii Amicii 279 ampli-

---

(1) *Astr. Nachr.* N°. 209. pag. 209—212.
(2) *Astr. Nachr.* N°. 252. pag. 197.
(3) *Connaissance des tems de* 1837. pag. 40.
(4) *Astr. Nachr.* N°. 252. pag. 212.

ficatione. Vespere 11 Junii horis $8\frac{1}{2}$, 9 et 10 nullum omnino annuli vestigium reperire potuit, subinde tamen annuli in planetae disco umbram perspicue observabat. Die 14 vespere putabat se annuli vestigium videre, sed non exploratum habebat. Die 15 hora vespertina $8\frac{3}{4}$ iterum se intueri annulum ex valde tenui luminis ductu suspicabatur, nondum tamen certo ei persuasum illud. Die autem 16 hora vespertina $8\frac{1}{2}$ certo ac manifeste annulum conspicabatur (1).

Wartman annulum primo tenuissimi fili instar in specula *Genevae* vidit, die 17 Junii hora vespertina $11\frac{1}{2}$, ope tubi Frauenhoferiani 160 et 240 amplificationibus; eumque sequenti vespere valde clare conspiciebat (2).

Valzius *Nemausi* Saturno inde ab 8 usque ad 14 Junii diem quaque vespera diligenter observato, nullum omnino annuli vestigium videre potuit. Non parum autem mirabatur, se die 15 hora vespertina $8\frac{1}{2}$, medio ipso crepusculo, indicia annuli 80 amplificatione agnoscere; 150 amplificatio hoc non sinebat. At maxime mirum ei accidebat, quum post brevem intermissionem hora $9\frac{1}{2}$ suas observationes persecuturus, nullum annuli vestigium reperire posset, quamvis crepusculum diminutum esset. Sequenti die, 16 nimirum, idem obtinuit; lucente adhuc crepusculo annuli vestigia intuebatur, noctu autem non item. Die 17 aër nubibus obductus erat. Die 18 iterum annulum quasi interdiu esset, conspicabatur hora vespertina $8\frac{1}{4}$, noctu autem multum operae intendere debuit, ut vestigia internosceret. Diebus 19 et 20 aër erat nubilatus. Die 21 hora vespertina 8, ergo sole adhuc lucente, annulum conspiciebat, et prima vice 150 amplificatione potuit videre, quum eum hucusque semper 80 amplificatione conspicari potuisset, qua eum etiam solo tamen noctis tempore observare ipsi licebat (3).

Schwabe *Dessaviae* die Junii 8 hora vespertina 10 tubo suo optico pedum 6 et 144 atque 216 amplificationibus in ansae orientalis directione, subinde tenuissimum luminis punctum observabat. Die 13 hora vespertina $9\frac{1}{2}$ ad partem planetae orientalem videbat in annuli directionem lucidi aliquid; non autem distinguere potuit utrum duplex luminis punctum vel magis lucida esset lineola. Die 14 hora vespertina $9\frac{1}{2}$ sua 144 amplificatione, prima vice licet debilem, tamen annulum quam certissime distinguere potuit; ansa occidentalis aliquatenus erat

(1) *Astr. Nachr.* N°. 249. pag. 149.
(2) *Biblioth. Univers. Avril* 1834. pag. 345.
(3) *Astr. Nachr.* N°. 243. pag. 41.

evidentior, et se usque ad planetae discum extendebat, orientalem vero quadam distantia a disco observare potuit (1).

Ita ut possimus ponere primo annulum visum fuisse:

Anni 1833, *die* 13 *Junii hora vespertina* 10$\frac{1}{2}$.

Transibat terra per annuli planum a facie australi ad faciem borealem.

§. 30.

Nobis ergo adsunt viginti observationes sequentes:

(1)	Disparitio.	1701 Nov. d. 25 hor. 6.	Terra	relinquebat	faciem	australem	vel ♄	supra	faciem	austr.
(2)	«	1714 Oct. d. 16 hor. 0.	«	«	«	«	« ♄	«	«	«
(3)	Reapparitio.	1715 Febr. d. 10 hor. 0.	Sol	«	«	«	« ⊙	«	«	borealem.
(4)	Disparitio.	1715 Mart. d. 22 hor. 0.	Terra	«	«	borealem	« ♄	«	«	«
(5)	Reapparitio.	1715 Julii d. 12 hor. 9.	«	«	«	australem	« ♄	«	«	«
(6)	«	1731 Febr. d. 15 hor. 0.	«	«	«	borealem	« ♄	«	«	austr.
(7)	«	1760 Maji d. 11 hor. 17.	Sol	«	«	«	« ⊙	«	«	«
(8)	Disparitio.	1773 Oct. d. 10 hor. 18.	Terra	«	«	australem	« ♄	«	«	«
(9)	Reapparitio.	1774 Jan. d. 10 hor. 12.	Sol	«	«	«	« ⊙	«	«	borealem.
(10)	Disparitio.	1774 Apr. d. 4 hor. 9.	Terra	«	«	borealem	« ♄	«	«	«
(11)	Reapparitio.	1774 Julii d. 1 hor. 9.	«	«	«	australem	« ♄	«	«	«
(12)	Disparitio.	1789 Maji d. 4 hor. 18.	«	«	«	borealem	« ♄	«	«	«
(13)	Reapparitio.	1789 Aug. d. 27 hor. 12.	«	«	«	australem	« ♄	«	«	«
(14)	Disparitio.	1789 Oct. d. 10 hor. 12.	Sol	«	«	borealem	« ⊙	«	«	«
(15)	Reapparitio.	1790 Jan. d. 29 hor. 6.	Terra	«	«	«	« ♄	«	«	austr.
(16)	Disparitio.	1802 Dec. d. 18 hor. 18.	«	«	«	australem	« ♄	«	«	«
(17)	Reapparitio.	1803 Jan. d. 3 hor. 14.	«	«	«	borealem	« ♄	«	«	«
(18)	Disparitio.	1803 Junii d. 16 hor. 12.	Sol	«	«	australem	« ⊙	«	«	«
(19)	«	1833 Apr. d. 27 hor. 9.	Terra	«	«	borealem	« ♄	«	«	borealem.
(20)	Reapparitio.	1833 Junii d. 13 hor. 10.	«	«	«	australem	« ♄	«	«	«

Quum ergo quod ad epochas, quibus per annuli planum terra transibat tantummodo, geocentricam Saturni longitudinem latitudinemque cognoscere et quod ad epochas, quibus sol per idem planum transibat, longitudinem latitudinemque non nisi heliocentricam habere necesse sit, has observationes bifariam dispescimus, in eas scilicet, quae ad terram atque in eas quae ad solem pertinent.

---

(1) *Astr. Nachr. Beilage zu* N°. 249. pag. 153.

Ad has longitudines latitudinesque computandas Saturni tabulas a Bouvardio éditas atque solis tabulas a Delambrio confectas adhibui; quamvis solis tabulas Carlinii, a Besselo emendatas, praetulissem, si iis uti mihi licuisset, neque quum eas acquirere mihi potuerim, contentus iis a Delambrio confectis esse debui.

Sequentes eventus nactus sum:

	λ Longitudo.	β Latitudo.	
1701 Nov. 25 hor. 6	350° 3′ 47″,9	— 2°20′ 17″,6	Geocentrica.
1714 Octob. 15 hor. 0	169 18 55 ,7	+ 1 52 31 ,1	«
1715 Febr. 10 hor. 0	169 58 54 ,6	+ 2 8 1 ,1	Heliocentrica.
Mart. 22 hor. 0	170 11 15 ,5	+ 2 24 25 ,0	Geocentrica.
Julii 12 hor. 9	169 50 4 ,6	+ 2 8 13 ,6	«
1731 Febr. 15 hor. 0	350 40 31 ,7	— 2 0 31 ,7	«
1760 Maji 11 hor. 17	351 1 41 ,3	— 2 8 54 ,2	Heliocentrica.
1773 Octob. 10 hor. 18	170 22 27 ,7	+ 1 53 46 ,2	Geocentrica.
1774 Januar. 10 hor. 12	170 41 0 ,1	+ 2 8 8 ,3	Heliocentrica.
April. 4 hor. 9	171 4 12 ,2	+ 2 26 6 ,2	Geocentrica.
Junii 1 hor. 9	170 43 4 ,5	+ 2 11 22 ,7	«
1789 Maji 4 hor. 18	350 28 6 ,4	— 1 54 11 ,9	«
Aug. 27 hor. 12	350 59 43 ,9	— 2 20 25 ,4	«
Octob. 10 hor. 12	350 47 23 ,3	— 2 8 11 ,3	Heliocentrica.
1790 Januar. 29 hor. 6	350 37 21 ,2	— 2 3 27 ,8	Geocentrica.
1802 Dec. 18 hor. 18	170 33 54 ,5	+ 2 1 4 ,6	«
1803 Januar. 3 hor. 14	170 41 55 ,5	+ 2 5 23 ,7	«
Junii 16 hor. 12	170 46 30 ,0	+ 2 8 5 ,2	Heliocentrica.
1833 April. 27 hor. 9	171 49 52 ,4	+ 2 25 30 ,5	Geocentrica.
Junii 13 hor. 10	171 37 31 ,9	+ 2 16 33 ,1	«

Ut ergo ex illis viginti observationibus, elevationem b solis vel terrae supra planum aliquod inveniamus, quod per centrum Saturni transit, ad eclipticam inclinat cum angulo $i + \delta i$ et cujus longitudo lineae intersectionis $n + \delta n$ est; sumamus tertiam aequationum (G) formulam pag. 101; ponentes aequatoris loco in hoc casu eclipticam, ita ut λ et β geocentricas vel heliocentricas longitudines latitudinesque in ecliptica deductas significent, atque i angulum, qui planum annuli cum plano eclipticae format; ita ut tunc nobis sit

$$\sin. b = - \cos. i \sin. \beta + \sin. i \cos. \beta \sin. (\lambda - n),$$

hanc formulam differentiantes, habemus

$$d\,.\,sin.\,b = di\;sin.\,i\;sin.\,\beta + di\;cos.\,i\;cos.\,\beta\;sin.\,(\lambda - n) - dn\,.\,sin.\,i\;cos.\,\beta\;cos.\,(\lambda - n)$$
$$= - sin.\,i\;cos.\,\beta\;cos.\,(\lambda - n)\,.\,dn + [sin.\,i\;sin.\,\beta + cos.\,i\;cos.\,\beta\;sin.\,(\lambda - n)]\,di\,,$$

habemus ergo pro valore b

$$sin.\,b = - cos.\,i\;sin.\,\beta + sin.\,i\;cos.\,\beta\;sin.\,(\lambda - n) - sin.\,i\;cos.\,\beta\;cos.\,(\lambda - n)\,.\,dn$$
$$+ [sin.\,i\;sin.\,\beta + cos.\,i\;cos.\,\beta\;sin.\,(\lambda - n)]\,di\,;$$

brevitatis causa ponamus

$$h\;cos.\,\mathrm{H} = cos.\,\beta\;sin.\,(\lambda - n)\,,$$
$$h\;sin.\,\mathrm{H} = sin.\,\beta\,,$$
$$cos.\,\beta\;sin.\,i\;cos.\,(\lambda - n) = p\,,$$
$$sin.\,\beta\;sin.\,i + cos.\,\beta\;cos.\,i\;sin.\,(\lambda - n) = h\;cos.\,(i - \mathrm{H}) = q\,;$$

ergo secundi membri duo priores termini fiunt

$$sin.\,b = - h\;cos.\,i\;sin.\,\mathrm{H} + h\;sin.\,i\;cos.\,\mathrm{H}$$
$$= h\;sin.\,(i - \mathrm{H})\,;$$

nobis ergo est

$$d\,.\,sin.\,b = - pdn + qdi\,;$$

in eo valores

$$\left.\begin{array}{l} dn = \delta n - 0{,}95338\,m\,(t - 83)\,, \\ di = \delta i + 0{,}03603\,m\,(t - 83)\,; \end{array}\right\}\ \text{vid. pag. 100.}$$

substituentes, acquirimus

$$d\,.\,sin.\,b = - p\delta n + q\delta i + [0{,}95338\,p + 0{,}035539\,q]\,(t - 83)\,m\,;$$

atque ergo pro expressione b

$$sin.\,b = sin\;b + d\,.\,sin.\,b$$
$$= h\;sin\;(i - \mathrm{H}) - p\delta n + q\delta i + [0{,}95338\,p + 0{,}035539\,q]\,(t - 83)\,m\,;$$

ut hanc formulam accomodemus, sumamus formulas (F) paginae 100, scilicet:

$$n = 177°\,21'\;0'' + \delta n + (50'',143 - 0{,}95338\,m)\,(t - 83)\,,$$
$$i = 28\;\;9\;\;30 + \delta i - (\;0{,}488 - 0{,}03603\,m)\,(t - 83)\,;$$

ponatur ergo, ut minor fiat valor m, $m = m' + 10''$, sequentes habemus formulas

$$n = 167°\,21'\;0'' + \delta n + (40'',6092 - 0{,}95338\,m')\,(t - 83)\,,$$
$$i = 28\;\;9\;\;30 + \delta i - (\;0{,}1277 - 0{,}03603\,m')\,(t - 83)\,.$$

Sumimus quia δn, δi et m' hucusque incognita sunt, loco n et i partem ejus independentem, nempe primam approximationem ut

$$n = 167°21'\ 0'' + 40'',6092\ (t-83),$$
$$i = 28\ \ 9\ 30\ -\ 0,1277\ (t-83).$$

et acquirimus valores b sequenti modo:

$t - 83 = -\ 131,10$

$Log.\ 40,6092 = 1.6086244$
$Log.\ 131,10 = 2.1176027$
3.7262271
$5323'',87 = 1°28'43'',87$

$167°21'0''$
$-\ 1\ 28\ 43,87$
$n = 165°52'16'',13$

$\lambda = 350°\ 3'41'',9$
$n = 165\ 52\ 16\ ,13$
$\lambda - n = 184°11'25'',77$
$\beta = -\ 2°20'17'',6$

$Log. cos. \beta = Log. cos. -2°20'17'',6 = 9.9996383$ $Log. sin. \beta = Log. sin. -2°20'17''6 = 8.6106426$ n.
$Log. sin. (\lambda - n) = Log. sin. 184\ 11\ 27,77 = 8.8637551$ n.
$Log. h\ sin. H = 8.6106426$ n.
$Log. h\ cos. H = 8.8633934$ n.

$$\frac{h\ sin.\ H}{h\ cos.\ H} = tang.\ H$$

$Log.\ h\ sin.\ H = 8.6106426$ n.
$Log.\ h\ cos.\ H = 8.8633934$ n.
$Log.\ tang.\ H = 9.7472492$
$H = 209°11'45'',79$

$Log.\ 0,1277 = 9.1061909$
$Log.\ 131,10 = 2.1176027$
1.2237936
$16'',74$

$i = 28°\ 9'30''$
$+\ 16,74$
$i = 28\ \ 9\ 46,74$
$H = 209\ 11\ 45,79$
$i - H = 178°58'\ 0'',95$

$Log.\ h\ cos.\ H = 8.8633934$ n.
$Log.\ cos.\ H = 9.9409922$ n.
$Log.\ h = 8.9224012$

$Log.\ h = 8.9224012$
$Log.\ sin.\ (i - H) = 8.2560885$
$Log.\ sin.\ b = 7.1784897$
$b = +\ 5'11'',1$

$Log.\ h = 8.9224012$
$Log.\ cos.\ (i - H) = 9.9999294$ n.
$Log.\ q = 8.9223306$ n.
$q = -\ 0,0836$

$Log.\ cos.\ \beta = Log.\ cos.\ -2°20'17'',6 = 9.9996383$
$Log.\ sin.\ i = Log.\ sin.\ 28\ \ 9\ 46,7 = 9.6739246$
$Log.\ cos.\ (\lambda - n) = Log.\ cos.\ 184\ \ 11\ 25,77 = 9.9988375$ n.
$Log.\ p = 9.6724004$ n.
$p = -\ 0,4703$

$Log.\ 0{,}95338 = 9.9792660$
$Log.\ p \quad = 9.6724004\,n.$
$Log.\ (t-83) = 2.1176027\,n.$
1.7692691
$num. = 58{,}785$
$0{,}395$
$+\ 59{,}180$

$Log.\ 0{,}03603 = 8.5566643$
$Log.\ q \quad = 8.9223306\,n.$
$Log.\ (t-83) = 2.1176027\,n.$
9.5965976
$num. = 0{,}395$

ita nobis est, valor b

$$+\ 5'\ 11''1 + 0{,}4703\,\delta n - 0{,}0836\,\delta i + 59'',18\,m'.$$

Viginti illas observationes eodem modo calculantes, acquirimus quod ad b attinet, sequentes valores:

			$(t-83)$		
1701	Nov.	25	— 131,10	+ 5′ 11″,1 + 0,4703 δn — 0,0836 δi + 59,18 m'.	☿ —
1714	Octob.	16	— 118,21	— 5 51 ,6 — 0,4709 + 0,0661 — 53,86	☿ —
1715	Febr.	10	— 117,89	— 0 48 ,9 — 0,4705 + 0,0784 — 53,22	⊙ +
	Mart.	22	— 117,78	— 9 30 ,5 — 0,4703 + 0,0838 — 53,17	☿ +
	Julii	12	— 117,47	— 5 17 ,3 — 0,4706 + 0,0761 — 53,03	☿ +
1731	Febr.	15	— 101,87	— 20 16 ,0 + 0,4702 — 0,0853 + 45,98	☿ —
1760	Maji	11.	— 72,64	— 13 31 ,1 + 0,4702 — 0,0868 + 32,79	⊙ —
1773	Octob.	10	— 59,23	+ 4 8 ,6 — 0,4703 + 0,0724 — 26,73	☿ —
1774	Januar.	10	— 58,97	+ 0 6 ,6 — 0,4705 + 0,0790 — 26,62	⊙ +
	April	4	— 58,75	— 4 53 ,9 — 0,4701 + 0,0874 — 26,52	☿ +
	Julii	1	— 58,50	— 1 55 ,3 — 0,4704 + 0,0799 — 26,40	☿ +
1789	Maji	4	— 43,65	— 1 27 ,5 + 0,4707 — 0,0712 + 19,70	☿ +
	Aug.	27	— 43,34	+ 6 53 ,8 + 0,4703 — 0,0828 + 19,56	☿ +
	Octob.	10	— 43,23	+ 1 56 ,6 + 0,4705 — 0,0779 + 19,51	⊙ +
1790	Januar.	29	— 42,92	+ 2 35 ,4 + 0,4706 — 0,0747 + 19,37	☿ —
1802	Dec.	18	— 30,04	— 6 13 ,0 — 0,4707 + 0,0712 — 13,56	☿ —
1803	Januar.	3	— 30,00	— 6 15 ,9 — 0,4706 + 0,0739 — 13,54	☿ —
	Junii	16	— 29,54	— 6 38 ,0 — 0,4706 + 0,0753 — 13,33	⊙ —
1833	April	27	+ 0,32	— 1 42 ,6 — 0,4700 + 0,0887 + 0,14	☿ +
	Junii	13	+ 0,45	+ 0 21 ,2 — 0,4702 + 0,0843 + 0,20	☿ +

Hic eadem animadversio valet, quam §. 26 ad Besseli computationes communicavimus; eam ergo non repetemus.

§. 31.

Has conditionales aequationes, iis annorum 1731 et 1760 exceptis, secundum minimorum quadratorum methodum tractantes, (quem in finem quamque aequationum multiplicamus per coëfficientem ad δn, posteaque per eam ad m', atque deinceps quamque seriem separatim addentes, quarum summam tunc $= 0$ ponimus) duas sequentes acquirimus aequationes:

$$\begin{aligned}
0 = & + (0,4703)\,(311,1) + (0,4703)^2\,\delta n - (0,4703)\,(0,0836)\,\delta i + (0,4703)\,(59,18)\,m' \\
& + (0,4709)\,(351,6) + (0,4709)^2\,\delta n - (0,4709)\,(0,0661)\,\delta i + (0,4709)\,(53,36)\,m' \\
& + (0,4705)\,(\;48,9) + (0,4705)^2\,\delta n - (0,4705)\,(0,0784)\,\delta i + (0,4705)\,(53,22)\,m' \\
& + (0,4703)\,(570,5) + (0,4703)^2\,\delta n - (0,4703)\,(0,0838)\,\delta i + (0,4703)\,(53,17)\,m' \\
& + (0,4706)\,(317,3) + (0,4706)^2\,\delta n - (0,4706)\,(0,0761)\,\delta i + (0,4706)\,(53,03)\,m' \\
& - (0,4707)\,(248,6) + (0,4707)^2\,\delta n - (0,4707)\,(0,0724)\,\delta i + (0,4707)\,(26,73)\,m' \\
& - (0,4705)\,(\;\;6,6) + (0,4705)^2\,\delta n - (0,4705)\,(0,0790)\,\delta i + (0,4705)\,(26,62)\,m' \\
& + (0,4701)\,(293,9) + (0,4701)^2\,\delta n - (0;4701)\,(0,0874)\,\delta i + (0,4701)\,(26,52)\,m' \\
& + (0,4704)\,(115,3) + (0,4704)^2\,\delta n - (0,4704)\,(0,0799)\,\delta i + (0,4704)\,(26,40)\,m' \\
& - (0,4707)\,(\;87,5) + (0,4707)^2\,\delta n - (0,4707)\,(0,0712)\,\delta i + (0,4707)\,(19,70)\,m' \\
& + (0,4703)\,(413,8) + (0,4703)^2\,\delta n - (0,4703)\,(0,0828)\,\delta i + (0,4703)\,(19,56)\,m' \\
& + (0,4705)\,(116,6) + (0,4705)^2\,\delta n - (0,4705)\,(0,0779)\,\delta i + (0,4705)\,(19,51)\,m' \\
& + (0,4706)\,(155,4) + (0,4706)^2\,\delta n - (0,4706)\,(0,0747)\,\delta i + (0,4706)\,(19,37)\,m' \\
& + (0,4707)\,(373,0) + (0,4707)^2\,\delta n - (0,4707)\,(0,0712)\,\delta i + (0,4707)\,(13,56)\,m' \\
& + (0,4706)\,(375,9) + (0,4706)^2\,\delta n - (0,4706)\,(0,0739)\,\delta i + (0,4706)\,(13,54)\,m' \\
& + (0,4706)\,(398,0) + (0,4706)^2\,\delta n - (0,4706)\,(0,0753)\,\delta i + (0,4706)\,(13,33)\,m' \\
& + (0,4700)\,(102,6) + (0,4700)^2\,\delta n - (0,4700)\,(0,0887)\,\delta i - (0,4700)\,(\;0,14)\,m' \\
& - (0,4702)\,(\;21,2) + (0,4702)^2\,\delta n - (0,4702)\,(0,0843)\,\delta i - (0,4702)\,(\;0,20)\,m'.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & + (311,1)\,(59,18) + (0,4703)\,(59,18)\,\delta n - (0,0836)\,(59,18)\,\delta i + (59,18)^2\,m' \\
& + (351,6)\,(53,36) + (0,4709)\,(53,36)\,\delta n - (0,0661)\,(53,36)\,\delta i + (53,36)^2\,m' \\
& + (\;48,9)\,(53,22) + (0,4705)\,(53,22)\,\delta n - (0,0784)\,(53,22)\,\delta i + (53,22)^2\,m' \\
& + (570,5)\,(53,17) + (0,4703)\,(53,17)\,\delta n - (0,0838)\,(53,17)\,\delta i + (53,17)^2\,m' \\
& + (317,3)\,(53,03) + (0,4706)\,(53,03)\,\delta n - (0,0761)\,(53,03)\,\delta i + (53,03)^2\,m' \\
& - (248,6)\,(26,73) + (0,4707)\,(26,78)\,\delta n - (0,0724)\,(26,73)\,\delta i + (26,73)^2\,m' \\
& - (\;\;6,6)\,(26,62) + (0,4705)\,(26,62)\,\delta n - (0,0790)\,(26,62)\,\delta i + (26,62)^2\,m' \\
& + (293,9)\,(26,52) + (0,4701)\,(26,52)\,\delta n - (0,0874)\,(26,52)\,\delta i + (26,52)^2\,m' \\
& + (115,3)\,(26,40) + (0,4704)\,(26,40)\,\delta n - (0,0799)\,(26,40)\,\delta i + (26,40)^2\,m' \\
& - (\;87,5)\,(19,70) + (0,4707)\,(19,70)\,\delta n - (0,0712)\,(19,70)\,\delta i + (19,70)^2\,m' \\
& + (413,8)\,(19,56) + (0,4703)\,(19,56)\,\delta n - (0,0828)\,(19,56)\,\delta i + (19,56)^2\,m' \\
& + (116,6)\,(19,51) + (0,4705)\,(19,51)\,\delta n - (0,0779)\,(19,51)\,\delta i + (19,51)^2\,m' \\
& + (155,4)\,(19,37) + (0,4706)\,(19,37)\,\delta n - (9,0747)\,(19,37)\,\delta i + (19,37)^2\,m'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (373{,}0)\ (13{,}56) + (0{,}4707)\ (13{,}56)\,\delta n - (0{,}0712)\ (13{,}56)\,\delta i + (13{,}56)^2\, m' \\
&+ (375{,}9)\ (13{,}54) + (0{,}4706)\ (13{,}54)\,\delta n - (0{,}0739)\ (13{,}54)\,\delta i + (13{,}54)^2\, m' \\
&+ (398{,}0)\ (13{,}33) + (0{,}4706)\ (13{,}33)\,\delta n - (0{,}0753)\ (13{,}33)\,\delta i + (13{,}33)^2\, m' \\
&- (102{,}6)\ (\ 0{,}14) - (0{,}4700)\ (\ 0{,}14)\,\delta n + (0{,}0887)\ (\ 0{,}14)\,\delta i + (\ 0{,}14)^2\, m' \\
&+ (\ 21{,}2)\ (\ 0{,}20) - (0{,}4702)\ (\ 0{,}20)\,\delta n + (0{,}0843)\ (\ 0{,}20)\,\delta i + (\ 0{,}20)^2\, m'
\end{aligned}
$$

multiplicationibus effectis, habemus

$$
\begin{aligned}
0 = &+ 146{,}3188 + 0{,}2212\,\delta n - 0{,}0393\,\delta i + 27{,}8340\, m' \\
&+ 165{,}5824 + 0{,}2218\,\delta n - 0{,}0311\,\delta i + 25{,}1293\, m' \\
&+ 23{,}0084 + 0{,}2214\,\delta n - 0{,}0369\,\delta i + 25{,}0410\, m' \\
&+ 268{,}3125 + 0{,}2212\,\delta n - 0{,}0394\,\delta i + 25{,}0064\, m' \\
&+ 149{,}3224 + 0{,}2215\,\delta n - 0{,}0358\,\delta i + 24{,}9561\, m' \\
&- 117{,}0172 + 0{,}2216\,\delta n - 0{,}0341\,\delta i + 12{,}5820\, m' \\
&- 3{,}1050 + 0{,}2218\,\delta n - 0{,}0372\,\delta i + 12{,}5238\, m' \\
&+ 138{,}1764 + 0{,}2210\,\delta n - 0{,}0411\,\delta i + 12{,}4680\, m' \\
&+ 54{,}2408 + 0{,}2213\,\delta n - 0{,}0376\,\delta i + 12{,}4288\, m' \\
&- 41{,}1877 + 0{,}2216\,\delta n - 0{,}0355\,\delta i + 9{,}2731\, m' \\
&+ 194{,}6144 + 0{,}2212\,\delta n - 0{,}0389\,\delta i + 9{,}1992\, m' \\
&+ 54{,}8600 + 0{,}2214\,\delta n - 0{,}0367\,\delta i + 9{,}1794\, m' \\
&+ 73{,}1337 + 0{,}2215\,\delta n - 0{,}0351\,\delta i + 9{,}1158\, m' \\
&+ 175{,}5808 + 0{,}2216\,\delta n - 0{,}0335\,\delta i + 6{,}3830\, m' \\
&+ 176{,}9120 + 0{,}2215\,\delta n - 0{,}0348\,\delta i + 6{,}3724\, m' \\
&+ 187{,}2926 + 0{,}2214\,\delta n - 0{,}0354\,\delta i + 6{,}2728\, m' \\
&+ 48{,}2269 + 0{,}2209\,\delta n - 0{,}0417\,\delta i - 0{,}0658\, m' \\
&- 9{,}9639 + 0{,}2211\,\delta n - 0{,}0397\,\delta i - 0{,}0940\, m'.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = &+ 18410{,}9000 + 27{,}8340\,\delta n - 4{,}9489\,\delta i + 3502{,}2733\, m' \\
&+ 18761{,}3739 + 25{,}1293\,\delta n - 3{,}5297\,\delta i + 2847{,}2893\, m' \\
&+ 2602{,}4576 + 25{,}0410\,\delta n - 4{,}1745\,\delta i + 2832{,}3687\, m' \\
&+ 30333{,}4785 + 25{,}0064\,\delta n - 4{,}4564\,\delta i + 2827{,}0500\, m' \\
&+ 16826{,}4192 + 24{,}9561\,\delta n - 4{,}0375\,\delta i + 2812{,}1800\, m' \\
&- 6645{,}0771 + 12{,}5820\,\delta n - 1{,}9342\,\delta i + 714{,}4930\, m' \\
&- 175{,}6920 + 12{,}5238\,\delta n - 2{,}1035\,\delta i + 708{,}6245\, m' \\
&+ 7794{,}2283 + 12{,}4680\,\delta n - 2{,}3169\,\delta i + 703{,}3103\, m' \\
&+ 3046{,}2257 + 12{,}4288\,\delta n - 2{,}1113\,\delta i + 698{,}0163\, m' \\
&- 1723{,}7496 + 9{,}2731\,\delta n - 1{,}4020\,\delta i + 380{,}0000\, m' \\
&+ 8093{,}9300 + 9{,}1992\,\delta n - 1{,}6192\,\delta i + 382{,}5937\, m' \\
&+ 227{,}4866 + 9{,}1794\,\delta n - 1{,}5206\,\delta i + 380{,}6402\, m' \\
&+ 3010{,}0978 + 9{,}1158\,\delta n - 1{,}4463\,\delta i + 375{,}1967\, m' \\
&+ 5057{,}8800 + 6{,}3830\,\delta n - 0{,}9660\,\delta i + 183{,}8736\, m'
\end{aligned}
$$

$$+\ 5089{,}6844 + 6{,}3724\,\delta n - 1{,}0002\,\delta i + 183{,}3316\,m'$$
$$+\ 5305{,}3400 + 6{,}2728\,\delta n - 1{,}0041\,\delta i + 177{,}6888\,m'$$
$$-\ 14{,}3640 - 0{,}0658\,\delta n + 0{,}0124\,\delta i + 0{,}0196\,m'$$
$$+\ 4{,}2400 - 0{,}0940\,\delta n + 0{,}0169\,\delta i + 0{,}0400\,m'.$$

et ita ergo

$$0 = +\ 1684'',3 + 3{,}9845\,\delta n - 0{,}6618\,\delta i + 233{,}6053\,m',$$
$$0 = +\ 116004{,}9 + 233{,}6053\,\delta n - 38{,}5420\,\delta i + 19708{,}9896\,m',$$

hic aequationem, quam supra §. 28 invenimus, jungentes, nempe

$$0 = +\ 27'',6 + 0{,}0452\,\delta n - 0{,}9647\,\delta i + 0{,}25\,m.$$

quae collecta est ex angulorum positionum comparatione.

Priusquam has solvamus aequationes, substituimus in duabus prioribus aequationibus, $m' = m - 10''$, nobisque est

$$0 = -\ 651'',8 + 3'',9845\,\delta n - 0'',6618\,\delta i + 233'',6053\,m;$$
$$0 = -\ 81085{,}0 + 233{,}6053\,\delta n - 38{,}5420\,\delta i + 19708{,}9896\,m,$$
$$0 = +\ 27{,}6 + 0{,}0452\,\delta n - 0{,}9647\,\delta i + 0{,}2500\,m.$$

his aequationibus solutis, habemus

$$\delta n = -\ 251'',1,$$
$$\delta i = +\ 18{,}43,$$
$$m = +\ 6{,}118,$$

hi valores substituantur in formulis

$$n = 167^\circ 21'\ 0'' + \delta n + (40'',6092 - 0{,}95338\,m')\,(t - 83);$$
$$i = 28\ \ 9\ \ 30 + \delta i - (0{,}1277 - 0{,}08603\,m')\,(t - 83).$$

quumque sit, $m' = m - 10'' = 6'',118 - 10'' = -\ 3'',882$, acquirimus igitur

$$n = 167^\circ 16' 48'',9 + 44'',3102\,(t - 83),$$
$$i = 28\ \ 9\ \ 48{,}4 - 0{,}2676\,(t - 83).$$

loco $t - 50$ ponentes $T - 1800$, tunc habemus

$$n = 166^\circ 52' 36'',7 + 44'',3102\,(T - 1800);$$
$$i = 28\ \ 9\ \ 57{,}2 - 0{,}2676\,(T - 1800).$$

Quando eodem modo ac Bessel 15 accuratissimas observationes supputamus, acquirimus

$$\delta n = -\ 230'',6,$$
$$\delta i = +\ 19{,}4,$$
$$m = +\ 5{,}591;$$

atque sic quoque

$$n = 167°17' \; 9'',4 + 44'',8126 \; (t - 83),$$
$$i = 28 \; 9 \; 49,4 - 0,2866 \; (t - 83);$$

atque ergo

$$n = 166°52'30'',6 + 44'',8126 \; (T - 1800);$$
$$i = 28° \; 9 \; 58,8 - 0,2866 \; (T - 1800).$$

Terrae vel solis recessiones a plano ita definito, pro epochis viginti datorum disparitionum reapparitionumque calculantes secundum formulam

$$\sin. b = - \cos. i \sin. \beta + \sin. i \cos. \beta \sin. (\lambda - n);$$

habemus sequentes valores

	b	
1701 Nov. 25.	— 1′ 0″	♁ —
1714 Oct. 16.	+ 0 6	♁ —
1715 Febr. 10.	+ 4 55	☉ +
1715 Mart. 22.	— 3 46	♁ +
1715 Jul. 12.	+ 0 28	♁ +
1731 Febr. 15.	— 25 29	♁ —
1760 Maji 11.	— 17 46	☉ —
1773 Oct. 10.	+ 7 56	♁ —
1774 Jan. 10.	+ 3 54	☉ +
1774 Apr. 4.	— 1 6	♁ +
1774 Jul. 1.	+ 1 50	♁ +
1789 Maji 4.	— 4 44	♁ +
1789 Aug. 27.	+ 3 37	♁ +
1789 Oct. 10.	— 1 19	☉ +
1790 Jan. 29	— 0 39	♁ —
1802 Dec. 18.	— 3 23	♁ —
1803 Jan. 3.	— 3 26	♁ —
1803 Jun. 16.	— 3 49	☉ —
1833 Apr. 27.	+ 0 6	♁ +
1833 Jun. 13.	+ 2 10	♁ +

Maxima terrae a definito vel medio annuli plano recessio vel elevatio, iterum, ut in praecedente computatione, quando hic rursus observationes annorum 1731 et 1760 omittimus, est diei 11 Octobris 1773, quamvis illa non tanta sit, quanta memoratae computationis, tamen satis notabilis est, atque etiam contrario affecta signo.

CAPUT IV.

ANNULI SATURNI PHASIUM COMPUTATIO.

§. 1.

Nodorum longitudinem atque plani annuli inclinationem quum in ecliptica cognoscamus conjunctis his elementis iisque terrae et Saturni orbitarum, quae nunc magno certitudinis gradu cognita sunt, phaenomena et phases, sub quibus se nobis ostendit annulus, computare possumus, et quod ad praeteritum et quod ad futurum attinet.

Capite II vidimus; 1°. circuliformem annulum, omni situ, se debere terrae ostendere ut ellipsin, cujus duo axes, se ad se invicem ita habent, ut unitas ad sinum anguli, quem efficit linea oculi ad centrum annuli ducta cum annuli plano. 2°. Minorem axem esse situm in plano, quod per hanc rectilineam perpendiculariter in annuli plano vel per hujus plani axem, ducitur.

Hisce duobus thesibus nobis licet annuli formam sive phases in omnibus definire sitibus.

§. 2.

Sit adscensio recta geocentrica Saturni . . . . = α.
Declinatio ejus geocentrica . . . . = δ.
Longitudo ascendentis nodi plani annuli in terrae aequatore = N.
Inclinatio plani annuli in terrae aequatore . . . . = I.
Latitudo terrae supra annuli planum . . . . = l.
Angulus positionis inferioris ellipseos partis . . . . = p.

tunc nobis est (vid. pag. 101.)

$$\left.\begin{aligned} \cos. l \cos. p &= \sin. \mathrm{I} \cos. (\alpha - \mathrm{N}), \\ \cos. l \sin. p &= \cos. \mathrm{I} \cos. \delta + \sin. \mathrm{I} \sin. \delta \sin. (\alpha - \mathrm{N}), \\ \sin. l &= -\cos. \mathrm{I} \sin. \delta + \sin. \mathrm{I}\, \mathrm{sos.} \delta \sin. (\alpha - \mathrm{N}). \end{aligned}\right\} (1)$$

Pro N et I has habemus formulas:

$$\left.\begin{aligned} \sin. \mathrm{I} \sin. \mathrm{N} &= \sin. i \sin. n; \\ \sin. \mathrm{I} \cos. \mathrm{N} &= \cos. i \sin. \omega + \sin. i \cos. \omega \cos. n, \\ \cos. \mathrm{I} &= \cos. i \cos. \omega - \sin. i \sin. \omega \cos. n. \end{aligned}\right\} (2)$$

Duae priores aequationes (1) praebent:

$$tang. p = \frac{\cos. \mathrm{I} \cos. \delta + \sin. \mathrm{I} \sin. \delta \sin. (\alpha - \mathrm{N})}{\sin. \mathrm{I} \cos. (\alpha - \mathrm{N})}$$
$$= \frac{\cos. \mathrm{I} [\cos. \delta + tang. \mathrm{I} \sin. \delta \sin. (\alpha - \mathrm{N})]}{\sin. \mathrm{I} \cos. (\alpha - \mathrm{N})},$$

ponentes

$$tang. \psi = tang. \mathrm{I} \sin. (\alpha - \mathrm{N}),$$

habemus

$$tang. p = \frac{\cos. \mathrm{I} (\cos. \delta + tang. \psi \sin. \delta)}{\sin. \mathrm{I} \cos. (\alpha - \mathrm{N})}$$
$$= \frac{\cos. \mathrm{I} (\cos. \psi \cos. \delta + \sin. \psi \sin. \delta)}{\sin. \mathrm{I} \cos. (\alpha - \mathrm{N}) \cos. \psi}$$
$$= \frac{\cos. \mathrm{I} \cos. (\psi - \delta)}{\sin. \mathrm{I} \cos. (\alpha - \mathrm{N}) \cos. \psi},$$

praebet itaque tertia aequatio (1),

$$\sin. l = \cos. \mathrm{I} [- \sin. \delta + tang. \mathrm{I} \cos. \delta \sin. (\alpha - \mathrm{N})]$$
$$= \cos. \mathrm{I} (- \sin. \delta + tang. \psi \cos. \delta)$$
$$= \frac{\cos. \mathrm{I} (- \sin. \delta \cos. \psi + \sin. \psi \cos. \delta)}{\cos. \psi}$$
$$= \frac{\cos. \mathrm{I} \sin. (\psi - \delta)}{\cos. \psi}.$$

Tali ratione aequationes (2), quandoquidem in iis ponimus

$$tang. \psi' = tang. i \cos. n,$$

has duas formulas praebent:

$$tang. \mathrm{N} = \frac{\sin. i \sin. n \cos. \psi'}{\cos. i \cos. (\psi' + \omega)},$$
$$\cos. \mathrm{I} = \frac{\cos. i \cos. (\psi' + \omega)}{\cos. \psi'}.$$

Computandae ergo nobis sunt sequentes formulae, ut p et l inveniamus,

$$tang.\,\psi' = tang.\,i\ cos.\,n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$tang.\,N = \frac{sin.\,i\ sin.\,n\ cos.\,\psi'}{cos.\,i\ sin.\,(\psi' + \omega)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$cos.\,I = \frac{cos.\,i\ cos.\,(\psi' + \omega)}{cos.\,\psi'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$tang.\,\psi = tang.\,I\ sin.\,(\alpha - N) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$tang.\,p = \frac{cos.\,I\ cos.\,(\psi - \delta)}{sin.\,I\ cos.\,(\alpha - N)\ cos.\,\psi} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$sin.\,l = \frac{cos.\,I\ sin.\,(\psi - \delta)}{cos.\,\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

sit axis major ellipseos annuli $= a'$,
et axis minor » » $= b'$,
tunc est

$$a' : b' = 1 : sin.\,l.$$

Ut postea videbimus, apparentem diametrum annuli in media distantia Saturni ad terram ponere = 39″,3125 possumus; quum sit media haec distantia computata ad 9,54219 diametros orbitae terrae, quarum logarithmus est 0.9796480; ita ut in media distantia nobis sit

$$a' = 39'',3125,$$
$$b' = 39'',3125\ sin.\,l.$$

Quumque media distantia ad veram distantiam se habet inversa ratione apparentium diametrorum in his distantiis, tunc habemus, media distantia $= m$ et vera distantia $= v$ ponentes, quod ad veram Saturni ad terram distantiam

$$a = \frac{m}{v} \times a' \qquad = \frac{m}{v} \times 39'',3125 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$b = \frac{m}{v} \times a'\ sin.\,l = \frac{m}{v} \times 39'',3125\ sin.\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

quum sit *Log.* $m = 0.9796480$.

Quod exemplo illustrabimus:

Quaeritur 3 *Julii die* 1838, *angulus p, quem minor axis cum declinationis circulo format; angulus l vel elevatio terrae in annuli plano e Saturno visa, major minorque annuli axis a et b?*

Praebent nobis formulas paginae 130, nempe

$$n = 166°\,52'\,30'',6 + 44'',8126\,(T-1800),$$
$$i = 28\;\;9\;58\,,8 - 0\,,2866\,(T-1800),$$

ut et paginae 71,

$$\omega = 23°\,27'\,54'',8 - 0'',477\,(T-1800),$$

praebent

$$n = 167°\,21'\,15'',9;\quad i = 28°\,9'\,47'',8;\quad \omega = 23°\,27'\,36'',4.$$

Secundum *Berliner Astron. Jahrbuch für das Jahr* 1838 nobis est

$$\alpha = 230°\,45'\,51''.5;\quad \delta = -16°\,18'\,33'',5;\quad Log.\,v = 0.9672916.$$

Log. tang. i = 9.7286544   *Log. sin.* i = 9.6739290   *Log. cos.* i = 9.9452746
Log. cos. n = 9.9893354n.   *Log. sin.* n = 9.3402847   *Log. sin.* $(\psi'+\omega)$ = 8.8562891
Log. tang. ψ' = 9.7179898n.   *Log. cos.* ψ' = 9.9476054n.   8.8015637
ψ' = 152° 25′ 15″,4   8.9618191n.
8.8015637
Log. tang. N = 0.1602554n.
N = 124° 39′ 39″,3

Log. cos. i = 9.9452746
Log. cos. $(\psi'+\omega)$ = 9.9988768 n.
9.9441514n.
Log. cos. ψ' = 9.9476054n.
Log. cos. I = 9.9965460
I = 7° 13′ 0″

Log. tang. I = 9.1025192   *Log. cos.* I = 9.9965460   *Log. sin.* I = 9.0990651
Log. sin. $(\alpha-N)$ = 9.9826162   *Log. cos.* $(\psi-\delta)$ = 9.9632311   *Log. cos.* $(\alpha-N)$ = 9.4430618n.
Log. tang. ψ = 9.0851354   9.9597771   *Log. cos.* ψ = 9.9968072
ψ = 6° 56′ 10″,7   8.5389341n.   8.5389341n.
Log. tang. p = 1.4208430n.
p = 92° 10′ 23″

$\alpha - N$ = 106° 6′ 12″,2   *Log. cos.* I = 9.9965460
$\psi - \delta$ = 23 14 44 ,2   *Log. sin.* $(\psi-\delta)$ = 9.5962380
9.5927840
Log. cos. ψ = 9.9968072
Log. sin. l = 9.5959768
l = 23° 13′ 50″,9

$Log.\, m = 0.9796480$	$Log.\, m = 0.9796480$
$Log.\, 39{,}3125 = 1.5945307$	$Log.\, 39{,}3125 = 1.5945307$
2.5741787	$Log.\, sin.\, l = 9.5959768$
$Log.\, v = 0.9672916$	2.1701555
$Log.\, a = 1.6068871$	$Log.\, v = 0.9672916$
$a = 40'',447$	$Log.\, b = 1.2028639$
	$b = 15'',954.$

Sic ergo habemus die 3 Julii 1838, angulum positionis inferioris ellipseos annuli partis = 92° 10′ 23″, vel angulum, quem semiaxis minor annuli cum circulo declinationis format = 2° 10′ 23″ borealis; terra tunc sita est 23° 13′ 50″,9 supra annuli planum; axem majorem apparentem = 40″,447 et axem minorem apparentem = 15″,954; quumque hic ultimus sit positivus valor, visibilis est borealis annuli facies.

§ 3.

Quando in aequationibus (1) eclipticam aequatoris loco ponimus, est nobis

$$\left.\begin{aligned} cos.\, l\; cos.\, q &= sin.\, i\; cos.\, (\lambda - n), \\ cos.\, l\; sin.\, q &= cos.\, i\; cos.\, \beta + sin.\, i\; sin.\, \beta\; sin.\, (\lambda - n) \\ sin.\, l &= -\, cos.\, i\; sin.\, \beta + sin.\, i\; cos.\, \beta\; sin.\, (\lambda - n). \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

quum sit

l = latitudini terrae supra annuli planum.
q = angulo positionis inferioris axis minoris partis cum circulo latitudinis.
i = inclinationi plani annuli ad eclipticam.
n = longitudini adscendentis annuli nodi in ecliptica.
λ = longitudini geocentricae Saturni in ecliptica.
β = latitudini geocentricae Saturni.

Nobis ergo sunt hae duae sequentes aequationes

$$tang.\, q = \frac{sin.\, i\; cos.\, (\lambda - n)}{cos.\, i\; cos.\, \beta + sin.\, i\; sin.\, \beta\; sin.\, (\lambda - n)} \quad . \; . \; . \quad (12)$$

$$sin.\, l = -\, cos.\, i\; sin.\, \beta + sin.\, i\; cos.\, \beta\; sin.\, (\lambda - n) \quad . \; . \; . \quad (13)$$

ultimae aequationis, relationem differentialem quod ad l et λ sumentes, et hanc relationem = 0 ponentes, habemus

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{sin.\, i\; cos.\, \beta\; cos.\, (\lambda - n)}{cos.\, l} = 0.$$

atque ergo

$$\cos.(\lambda - n) = 0,$$
$$\lambda - n = 90^\circ,$$

hunc valorem in aequatione (13) substituentes, acquirimus

$$\sin. l = - \cos. i \sin. \beta + \sin. i \cos. \beta$$
$$= \sin. (i - \beta),$$
$$l = i - \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Exinde sequitur, annulum quam maximam suam aperturam habere, quando Saturnus 90° ab annuli nodis distat, quum tunc elevatio vel latitudo terrae supra annuli planum aequalis sit annuli in ecliptica inclinationi minus latitudine. Atque quum sit $q = 0$, minorque axis perpendiculariter in ecliptica erecta est. Quando Saturnus in nodo adest, fit $tang.\, q = \frac{tang.\, i}{\cos.\, \beta}$, habetque tunc q maximum suum valorem, atque aliquanto major est quam annuli in ecliptica inclinatio, prout β sit majus vel minus.

§. 4.

Ut definiantur disparitiones, propterea quod terra per annuli planum transit, in aequatione (13) $l = 0$ fit, habemusque

$$\sin. (\lambda - n) = \frac{tang.\, \beta}{tang.\, i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

λ' et β' pro longitudine latitudineque Saturni heliocentrica sumentes, nobis est, quod ad disparitiones, quae originem habent ex eo, quod per annuli planum sol transit

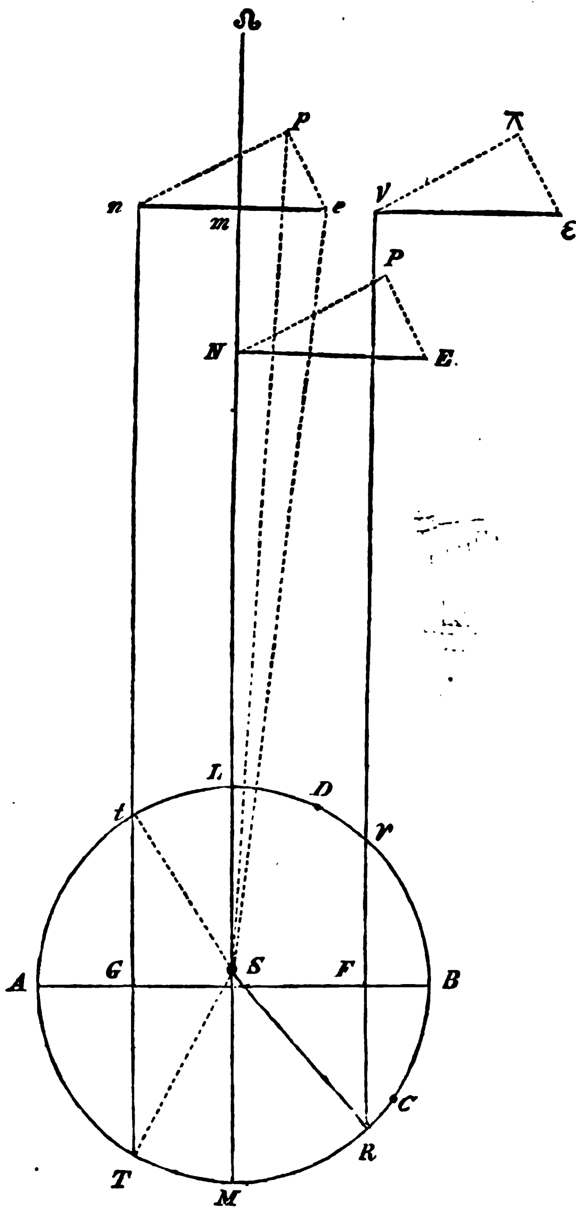
$$\sin. (\lambda' - n) = \frac{tang.\, \beta'}{tang.\, i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Formulae (15) et (16) proprie ostendunt limites disparitionis et reapparitionis annuli; prima quando terra per annuli planum, secunda quando sol per annuli planum transeat.

Tamdiu invisibilis manet annulus, donec vel sol vel terra per ejus planum transierit iterumque illud permeaverit; scilicet, tamdiu, quamdiu annuli planum solem inter et terram transit; computamus hic, ut per se patet quod ad limitem disparitionis reapparitionisque, illum situm, in quo solum annuli crassitudo conspici potest, qui se semper adhuc per Herschelii telescopium ut lineam rectam ostendit; aeque quidem ac quando per ejus planum terra transit, ut et quando per illud transit sol; primus nos docet casus, annulum aliquam adhuc habere crassitudinem; secundus, obtusos annuli margines esse.

Illustrabimus illud simplicissima constructione, quam nobis reliquit SCHUBERTUS (1).

§. 5.



Sit Figura apposita, S sol, ATB*t* orbita terrae, quam hic ut et illam Saturni tanquam circuli formam assumere possumus, atque S☊ nodorum annuli linea. Saturnum ponentes in P seu *p*; PE et *pe* perpendiculariter in ecliptica; PNS, P*n*T et *πνε* annuli planum; atque ergo NLM et *nt*T eorum intersectio communis cum ecliptica, quae paralleliter sibi invicem currunt et in quibus EN et *en* perpendiculariter ducta sunt. Hoc posito, est PNE $=$ *pne* $=$ *πνε* $=$ i $=$ inclinationi annuli in ecliptica.

Disparebit ergo annulus, 1°. quando in P Saturnus adest, sit terra ubicunque si libeat; transit enim tunc annuli planum per solem. 2°. Quando in *p* Saturnus adest, et terra in *t* vel T, id est, quando in nodorum annuli linea terra adest. 3°. Tamdiu, quamdiu annuli planum vel linea *n*T solem inter et terram transit, quia annuli planum PN vel *pn* ad E conversum, a sole illuminatur, tum facies opposita se terrae ostendit.

Primus duntaxat locum habere potest casus, quando Saturnus est in S vel in puncto opposito orbitae suae, scilicet semel 15 quoque anno. Quia Saturni

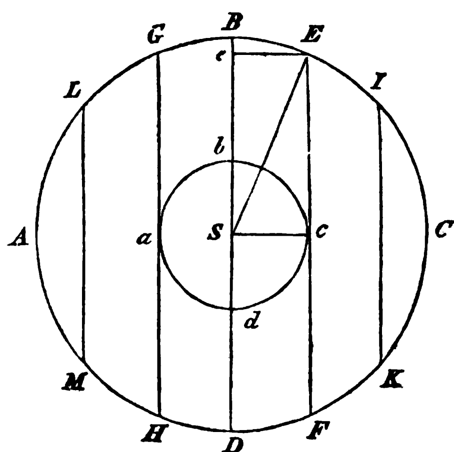
(1) Conf. SCHUBERT, *Traité d'Astronomie*, Tom. II. pag. 244. BODE, *Astron. Jahrbuch*, 1796. pag. 196.

aphelium situm est inter adscendentem descendentemque annuli nodum, ejusque maxima aequatio centri 6° 26′ 19″,5 continet, majus intervallum temporis Saturnus consumet, ut ab adscendente nodo ad descendentem, quam a descendente ad adscendentem eat; primum intervallum circiter est 15 annis et 293 diebus, secundumque 13 annis diebusque 240.

Alter tertiusque supponunt casus, annuli planum nT, per orbitam terrae transeat, vel inter A et B incidat. Omnia periodica annuli phaenomena continentur tunc spatio temporis, quod adhibet Saturnus, ut arcum orbitae suae transcurrat, cujus chorda AB est, quae similis est duplici annuae parallaxi Saturni $= 0'',105$ vel maximae differentiae geocentricam inter et heliocentricam longitudinem, quae 6° continet. Revolvens Saturnus 360° circiter 30 annis, uno anno 12° percurret, ita ut omnia periodica annuli phaenomena uno anno locum habeant, utraque disparitio ad summum discrepent a se dimidio anno, quae phaenomena fere anno quoque 15 obtinent (1).

§. 6.

Quaeque ergo disparitio incidit inter duas epochas, in quibus annuli planum



(1) Ut clarius quodammodo illud proponamus; sit Figura apposita ABCD orbita Saturni et *abcd* illa terrae, atque S solis centrum, et KI, EF, BD, GH, LM situs plani annuli semper parallelus sibi ipsi. Ponatur ergo Saturnus initio suae trigenalis periodi esse in F, ubi prolongatum annuli planum, terrae orbitam in *c* tangit. Dum ergo arcum suae orbitae FKCIE describit Saturnus, ex omni puncto orbitae suae terra semper illuminatam annuli faciem videt, quia semper adest eidem annuli lateri, ubi quoque sol adest Idem locum etiam habet, quando arcum GLAMH orbitae suae describat Saturnus. Quum ergo radius SB vel SE Saturni orbitae ad radium S*c* orbitae terrae se habeat ut 9,54 ad unitatem, tunc habemus, quum E*e* = S*c* sit

$$\sin.\,\mathrm{BSE} = \sin.\,\mathrm{BE} = \frac{\mathrm{E}e}{\mathrm{SE}} = \frac{1}{9,54} = 0,1048,$$

vel BE = 6° 1′ atque ergo EG = 12° 2′; et quia Saturni revolutio 29,46 annos Julianos continet, ita intervallum temporis, per quod arcum EG vel HF describit, simile est

$$\frac{29,46 \times 12^\circ 2'}{360^\circ} = 0,98 \text{ annis}$$

atque ergo fere unus annus.

terrae orbitam in A et B tangit, vid. Fig. pag. 137; ita ut in omni casu, plani annuli cum eo eclipticae intersectio, vel ut brevitatis causa nominari licet, annulus per terrae orbitam transire debeat.

Quando ergo Saturnus est in p, tunc pSe latitudo heliocentrica $= \beta$ est et mSe distantia Saturni a nodo boreali in ecliptica computata $= \lambda - n'$, radius orbitae terrae $SA = r$ et radius Saturni orbitae $Sp = r'$, tunc habemus

$$\begin{aligned} pe &= r' \sin.\beta, \\ Se &= r' \cos.\beta, \\ ne &= pe \operatorname{cotg}. i = r' \sin.\beta \operatorname{cotg}. i, \\ me &= Se \sin.(\lambda - n') = r' \cos.\beta \sin.(\lambda - n'), \end{aligned}$$

ergo

$$mn = ne - me = r' [\sin.\beta \operatorname{cotg}. i - \cos.\beta \sin.(\lambda - n')],$$

eodemque modo, quum Saturnus est in π,

$$\begin{aligned} \pi\varepsilon &= r' \sin.\beta, \\ S\varepsilon &= r' \cos.\beta, \\ \nu\varepsilon &= \pi\varepsilon \operatorname{cotg}. i = r' \sin.\beta \operatorname{cotg} i, \\ m\varepsilon &= S\varepsilon \sin.(\lambda - n') = r' \cos.\beta \sin.(\lambda - n'), \\ m\nu &= m\varepsilon - \nu\varepsilon = r' [\cos.\beta \sin.(\lambda - n') - \sin.\beta \operatorname{cotg}. i]. \end{aligned}$$

Transit nunc annulus per A vel B, quando $mn = m\nu = r$ est. Hoc praebet ergo quod ad extremos limites

$$\begin{aligned} mn = r &= r' [\sin.\beta \operatorname{cotg}. i - \cos.\beta \sin.(\lambda - n')], \\ r' \cos.\beta \sin.(\lambda - n') &= r' \sin.\beta \operatorname{cotg}. i - r, \\ \sin.(\lambda - n') &= \operatorname{tang}.\beta \operatorname{cotg}. i - \frac{r}{r'} \sec.\beta, \\ m\nu = r &= r' [\sin.(\lambda - n') \cos.\beta - \sin.\beta \operatorname{cotg}. i], \\ r' \sin.(\lambda - n') \cos.\beta &= r' \sin.\beta \operatorname{cotg}. i + r, \\ \sin.(\lambda - n') &= \operatorname{tang}.\beta \operatorname{cotg}. i + \frac{r}{r'} \sec.\beta, \end{aligned}$$

ergo quod ad ambos casus

$$\begin{aligned} \sin.(\lambda - n') &= \operatorname{tang}.\beta \operatorname{cotg}. i \mp \frac{r}{r'} \sec.\beta \\ &= \frac{\operatorname{tang}.\beta}{\operatorname{tang}. i} \mp \frac{r}{r' \cos.\beta}, \end{aligned}$$

est nunc

$$sin.\,(\lambda - n') > \frac{tang.\,\beta}{cotg.\,i} + \frac{r}{r'\,cos.\,\beta},$$

vel

$$< \frac{tang.\,\beta}{cotg.\,i} - \frac{r}{r'\,cos.\,\beta},$$

tunc non obtinere annuli disparitio potest. Sed inter hos limites ad minimum semel debet disparere.

Quod ad annum 1833 nobis est:

Longitudo adscendentis nodi annuli $= n' = 167°\,17'\,9'',4.$
Longitudo adscendentis nodi Saturni $= n' = 112\;\;14\;1\;\;,0.$

et quum $\lambda - n'$ tantum paucos continere gradus potest, tunc latitudinis argumentum est, quando annulus disparet $= 55°\,3'\,8'',4$; ergo quum *tang.* $\beta =$ *sin.* arg. latit. $\times$ *tang.* inclin. Sat. ad eclipticam est, $\beta = 2°\,2'\,45'',8$. Tunc habemus ut $\lambda - n'$ definiamus in aequatione

$$sin.\,(\lambda - n') = \frac{tang.\,\beta}{tang.\,i} \mp \frac{r}{r'\,cos.\,\beta},$$

valores

$$\beta = 2°\,2'\,45'',8; \qquad i = 28°\,9'\,49'',3; \qquad r = 1; \qquad r' = 9{,}53877;$$

quae praebet

$$\lambda - n' = -\,2°\,11'\,17'',1 \text{ et } \lambda - n' = +\,9°\,52'\,59'',4,$$

atque his latitudinis argumenta

$$52°\,51'\,51'',3 \quad \text{et} \quad 64°\,56'\,7'',8,$$

et latitudines

$$\beta = 1°\,59'\,24'',0 \quad \text{et} \quad \beta = 2°\,15'\,39'',3,$$

quibus adhuc accuratior invenimus

$$\lambda - n' = -\,2°\,17'\,30'',7 \quad \text{et} \quad \lambda - n' = +\,10°\,17'\,30''4,$$

hos valores addentes ad adscendentis nodi longitudinem, acquirimus quod ad longitudines heliocentricas Saturni

$$\lambda = 164°\,59'\,38'',7 \quad \text{et} \quad \lambda = 177°\,34'\,39'',8.$$

Disparere ergo solum annulus potest, quando longitudo Saturni heliocentrica incidit inter $164°\,59'\,38'',7$ et $177°\,34'\,39'',8$ vel inter $344°\,59'\,38'',7$ et $357°\,34'\,39'',8$. Per se patet, hoc stricte sumto, tantum valere quod ad annum 1833, quem annum hic basin posuimus; in omnem alium annum annuam variationem in longitudine nodi annuli ejusque inclinatione etiam computare debemus, ut formulae illas

ostendunt; illa autem differentia tam parum valet, ut nullius momenti sit; si negligamus, et inprimis, quum limites tantummodo tradamus.

Horum phaenomenorum possibilitas tamdiu durat, quantum temporis Saturnus impendat, ut arcum 12° vel 13° percurrat, ergo circiter unum annum, quo intervallo annuli planum ab A ad B trans terrae orbitam traducitur. Si autem revera dispariturus sit annulus, ejus planum vel per solem, vel per terram, vel per utrumque transeat necesse est; videmusque facile illud ultimum accidere non posse, quum unus primorum amborum casuum locum non habuerit. Tempora, quibus annuli planum per solem vel terram transit, sunt ergo initium finisque visibilitatis annuli.

Annulus per solem transit, quando est

$$sin.(\lambda - n') = \frac{tang.\beta}{tang.i},$$

idem etiam invenitur, quando ponitur mn vel $m\nu = 0$. Si autem per terram transit annuli intersectio nT vel νR, quae adest in aliquo locorum t, T, r vel R, debet tunc, quando AB perpendiculariter in tT et rR erectum est, esse $mn =$ SG, vel $m\nu =$ SF.

Quum solis distantia ad nodum annuli adscendentem, sit $= t$S☊ $= \odot - n$, est

$$GS = r\ sin.(\odot - n),$$

et

$$SF = - r\ sin.(\odot - n),$$

quoad terra in locis sit T, t vel R, r; quum ergo GS $= mn$, SF $= m\nu$ futurus sit et $m\nu = - mn$ sit, generaliter quod ad quatuor locos has habebimus aequationes:

$$mn = r\ sin.(\odot - n) = r'\ [sin.\beta\ cotg.i - sin.(\lambda - n')\ cos.\beta];$$

ponatur brevitatis causa

$$\frac{tang.\beta}{tang.i} = p; \quad \frac{r}{r'\ cos.\beta} = q;$$

tunc acquirimus pro generali aequatione

$$sin.(\lambda - n') = p - q\ sin.(\odot - n).$$

Temporis momenta disparitionum reapparitionumque annuli continentur ergo in duabus sequentibus aequationibus

$$sin.(\lambda - n') = p,$$
$$sin.(\lambda - n') = p - q\ sin.(\odot - n).$$

Prima aequatio locum habet, quando annuli planum per solem transit, secundaque quando illud transit per terram. Ambo inter limites sita sunt

$$sin.(\lambda - n') = p - q \quad \text{et} \quad sin.(\lambda - n') = p + q.$$

Est $sin.(\lambda - n') = p$, quum tunc annuli intersectio in medio est inter A et B, est ergo ejus latitudo fere in medio inter $1°59'24'',0$ et $2°15'39'',3$ vel $\beta = 2°7'32''$ et hoc praebet $\lambda - n' = 3°58'30'',7$ vel longitudinem Saturni $= 171°15'40'',1$ et $= 351°15'40'',1$. Hic $\lambda - n'$ et $\odot - n$ distantiis annuli nodorum per quos Saturnus transit significantibus.

Omnis horum phaenomenorum computatio ergo facillime fit sequenti modo: Tempore, quo Saturni longitudo fere est 171° vel 351°, computemus ab intervallo in intervallum, ejus heliocentricam longitudinem latitudinemque, unde ipsum tempus invenimus, quando $sin.(\lambda - n') = p$ est, pro eodem tempore etiam computetur solis longitudo, a qua nodi annuli longitudinem subtrahimus, quo fit, ut distantiam solis ab annuli nodo adscendente $\odot - n$ accipiamus, eo modo omnes annuli phases definire possumus.

Nunc quatuor casus distinguendi sunt: (vid. Fig. pag. 137.)

Casus I. Quando $\odot - n$ est inter 0° et 90°. Tunc terra est in primo quadrante LA in t, Saturnus in p, sit ordo signorum secundum quem Saturnus terraque circa solem ducuntur BLAM; sex menses ante per B transiit annulus, quum terra sit in R. In hoc semestri necesse fuit ut annulo occurrerit terra, inter R et B alicubi in C, atque ergo iterata vice attigerit inter B et L in D: disparuit ergo annulus in C et apparuit rursus in D, quia terra in C ad obscuram annuli faciem transiit et in D ad partem illuminatam. Eo momento, quo in t est terra, annulusque in NLM, iterum disparet, quia per solem transit: sex mensibus post, terra est in R, annulus in A; annulo igitur occurrit in quadrante AM, transiens tunc ad ejus partem illuminatam; annulus visibilis factus est, manetque per 15 annos. Tali anno duae disparitiones totidemque reapparitiones obtinent.

Casus II. Quando incidit $\odot - n$ inter 90° et 180°. Tunc terra est in secundo quadrante AM in T annulusque in LM; sex mensibus ante fuit terra in r annulusque in B: fuit ergo omnis pars rLAT orbitae suae ad partem annuli illuminatam. Postquam disparuit annulus, quia transierat in L per solem, terra ei obviam fiet inter T et M, transiens ad partem ejus illuminatam. Locum tunc tantummodo unica disparitio habet, quae minus quam tres menses durat.

Casus III. Quando incidit $\odot - n$ inter 180° et 270°. Terra est in R in tertio quadrante. Sex mensibus ante fuit in t annulusque in B: visibilis tunc fuit, illo tempore, quo percurrit terra arcum tAM; terra autem ei obviam facta, dispa-

ruit, donec terra esset in R, transeunte annulo per solem in L. Per sex sequentes menses terra adest lateri annuli illuminato. Una tantum disparitio illo anno aeque ac in praecedente casu obtinet, quae minus quam tres menses durat.

Casus IV Quando incidit $\odot - n$ inter 270° et 360°, terra est in quarto quadrante BL in r. Fuit ergo sex mensibus ante in T, annulusque in B: occurrit ei in quadrante MB, transiens ad ejus latus obscurum. Quando annulus per solem in L transit, faciem illuminatam ad terram vertit in r, sexque mensibus post, terra adest in T et annulus in A; attingit ergo eum in quadrante LA, transiens tunc iterum ad ejus latus obscurum, obviamque rursus ei fit inter A et T, transeunte tunc terra ad ejus latus illuminatum. Locum tunc habent duae disparitiones totidemque annuli reapparitiones.

§. 8.

Apparet exinde visibilitati annuli maxime commodum situm esse illum, quando terra adest in M, eodem tempore, quo annulus, ita ut paullo post suam cum sole conjunctionem per annuli nodum transeat Saturnus. Tunc per duo semestria in LAM et MBL terra adest lateri annuli illuminato, neque eum ante e conspectu amittet, quam quum in L per solem transit; propter magnam solis propinquitatem tali anno observari non poterit annulus.

Maxime incommodi concurrunt casus, quando terra est in L eodem, quo annulus, tempore; Saturno paullo post suam cum sole oppositionem per annuli nodum transeunte. Tali in casu terra sex mensibus ante in M et annulus in B fuit; ei obviam fit in R, temporis momento, quod facilius inveniri potest, supponendo intervallo unius anni planum annuli diametrum orbitae terrae $BA = 2r$ uniformiter percurrere, qui est chorda orbitae Saturni qui subtendit 12°. Sit t tempus quaesitum in anni partibus expressum, in quibus terra et annulus in R venerint; chorda quam annulus percurrit, erit $BF = 2rt$, et angulus, quem terra circa solem describit $MSR = 2\pi t$, tunc erit

$$SF = r \sin. 2\pi t$$

et quum sit

$$BF + SF = BS,$$

et ergo

$$2rt + r \sin. 2\pi t = r,$$

vel

$$2t + \sin. 2\pi t = 1,$$

ex iis valore t computato, habemus

$$t = 0^{\text{ann.}},132 = 48^{\text{diebus}} = \text{fere } 1\tfrac{1}{2}^{\text{mens.}}$$

Ab eo inde momento annulus per $6 - 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ mensibus visibilis manebit, donec eodem tempore, quo terra in L venerit, quae tunc ad partem obscuram transit; annulus tunc invisibilis manebit, donec iterum terrae in T obviam fiat. Sit τ tempus, quod terra impendit ad percurrendum LAT, tunc iterum acquirimus ut supra

$$SG = 2r\tau; \quad LST = 2\pi\tau;$$

itaque

$$SG = 2 \, sin. 2\pi\tau,$$

atque ergo

$$2r\tau = r \, sin. 2\pi t,$$
$$2\tau = sin. 2\pi t,$$

unde invenimus

$$\tau = 0^{\text{ann.}},368 = 134^{\text{diebus}}.$$

Ita ut annulus tali anno per $4\frac{1}{2}^{\text{mens.}} + 134^{\text{dies}} = 9$ mensibus invisibilis maneat; quod est omnium maxime diuturnum tempus.

§. 9.

Delambrii Methodus.

Tradit brevissimam eamque simplicissimam methodum Delambre (1), ut disparitiones reapparitionesque annuli computentur, quae est sequens.

Ponamus in generali formula fundamentali

$$sin. l = - cos. i \, sin. \beta + sin. i \, cos. \beta \, sin. (\lambda - n),$$
$$l = 0;$$

tunc nobis est

$$sin. (\lambda - n) = cotg. i \, tang. \beta;$$

inclinationem orbitae Saturni ad eclipticam $= i'$ et longitudinem nodorum hujus orbitae in ecliptica $= n'$ ponentes, habemus

$$tang. \beta = tang. i' \, sin. (\lambda - n'),$$

hunc valorem in ultima aequatione substituentes, acquirimus

$$sin. (\lambda - n) = cotg. i \, tang. i' \, sin. (\lambda - n'),$$

(1) Delambre, *Astronomie theorique et pratique*, Tom. III. pag. 89 seq.

vel

$$sin.\,(\lambda - n)\; tang.\, i = tang.\, i'\; sin.\,(\lambda - n');$$

unde hanc proportionem possumus deducere

$$tang.\, i : tang.\, i' = sin.\,(\lambda - n') : sin.\,(\lambda - n)$$

$$tang.\, i + tang.\, i' : tang.\, i - tang.\, i' = sin.\,(\lambda - n') + sin.\,(\lambda - n) : sin.\,(\lambda - n') - sin.\,(\lambda - n)$$

$$sin.\,(i + i') : sin.\,(i - i') = tang.\, \tfrac{1}{2}(\lambda - n' + \lambda - n) : tang.\, \tfrac{1}{2}(\lambda - n' - \lambda + n)$$

$$= tang.\left(\lambda - \frac{n + n'}{2}\right) : tang.\, \tfrac{1}{2}(n - n');$$

unde acquirimus

$$tang.\left(\lambda - \frac{n + n'}{2}\right) = \frac{sin.\,(i + i')}{sin.\,(i - i')}\; tang.\, \tfrac{1}{2}(n - n');$$

quum sit

$$\lambda = \left(\lambda - \frac{n + n'}{2}\right) + \frac{n + n'}{2};$$

hanc formulam in phaenomena anni 1833, applicantes, habemus

$$n = 167^\circ 17'\; 9'',4; \qquad n' = 112^\circ 14'\; 1'',1;$$

$$i = \;\; 28\;\; 9\;\; 49\;,3; \qquad i' = \;\; 2\;\; 29\;\; 44\;,4;$$

$$\begin{array}{lll} Log.\, sin.\,(i + i') & = Log.\, sin.\;\; 30^\circ 39' 33'',7 = & 9{\cdot}7075130 \\ Log.\, tang.\, \tfrac{1}{2}(n - n') & = Log.\, tang.\;\; 27\;\; 31\;\; 34\;,1 = & \underline{9.7169603} \\ & & 9.4244733 \\ Log.\, sin.\,(i - i') & = Log.\, sin.\;\; 25\;\; 40\;\; 4\;,9 = & \underline{9.6366446} \\ & & 9.7878287 \end{array}$$

$$\lambda - \frac{n + n'}{2} = \;\; 31^\circ 31' 47'',8$$

$$\frac{n + n'}{2} = 139\;\; 45\;\; 35\;,2$$

$$\lambda = 171^\circ 17\;\; 23'',0$$

$$\lambda = 351\;\; 17\;\; 23\;,0$$

Prima heliocentrica longitudo convenit cum 5 die Decembris 1832, (Vid. *Astron. Jahrb.* 1832. pag. 132), transeunte tunc sole per annuli planum a meridie ad septemtrionem.

§. 10.

Aliquatenus fusius est plani annuli per terram transitus definire, sumatur hunc in finem haec formula

$$sin.\,(\lambda' - n) = \frac{tang.\, \beta'}{tang.\, i},$$

iisque, ut notum est, λ' et β' geocentricam longitudinem et latitudinem Saturni significant; in hac ergo aequatione duas incognitas quantitates habemus, nempe λ' et β'; quum autem invenimus longitudinem heliocentricam Saturni, propemodum etiam latitudinem geocentricam cognoscimus, quoniam illa, anni spatio, non tantum mutatur, transitusque plani annuli per terram paucis mensibus ante plani annuli per solem transitum obtinet, aut cito eum sequitur, habemus ergo valorem approximativum pro β' atque ergo etiam quod ad $\lambda' - n$. Cum eo approximativo valore pro λ' convenit valor quod ad β', quocum etiam computationem incipimus, quae iterum accuratiorem valorem pro $\lambda' - n$ praebet.

Ut hanc parvam computationem evitemus, sequentem componamus tabulam: quum sit

$$\lambda' - n = arc.\ sin. \left(= \frac{tang.\ \beta'}{tang.\ i}\right),$$

vel

$$\lambda' = n + arc.\ sin. \left(= \frac{tang.\ \beta'}{tang.\ i}\right),$$

computetur quod ad β' a 10′ ad 10′ usque ad 3°, valores $arc.\ sin. \left(= \frac{tang.\ \beta'}{tang.\ i}\right)$; quo habemus hanc tabulam:

β'	$arc.\ sin. \left(= \frac{tang.\ \beta'}{tang.\ i}\right)$	Differ.
0° 0′	0° 0′ 0″	
0 10	0 18 41	18′ 41″
0 20	0 37 21	18 40
0 30	0 56 2	18 41
0 40	1 14 43	18 41
0 50	1 33 34	18 41
1 0	1 52 5	18 41
1 10	2 10 47	18 42
1 20	2 29 29	18 42
1 30	2 48 11	18 42
1 40	3 6 54	18 43
1 50	3 25 38	18 44
2 0	3 44 22	18 44
2 10	4 3 7	18 45
2 20	4 21 52	18 45
2 30	4 40 38	18 46
2 40	4 59 25	18 47
2 50	5 18 12	18 47
3 0	5 37 1	18 49

Inservit haec ergo tabula, ut inveniatur ope argumenti β' valor *arc. sin.* $\left(=\frac{tang.\,\beta'}{tang.\,i}\right)$, quem addemus ad valorem n aut ad nodi borealis longitudinem annuli, ut λ' nanciscamur.

Quandoquidem ergo, ut vidimus, plani annuli per solem transitus obtinebat, quum longitudo heliocentrica Saturni erat 171° 17′ 23″, haecque longitudo conveniret, cum 5 Decembris die anni 1832, quo die erat geocentrica Saturni latitudo + 2° 6′; cum hac latitudine invenimus in tabula

$$\begin{array}{rr} & 3°\,55'\,37'' \\ \text{ad hoc addentes } n = & 167\ \ 17\ \ \ 9{,}4 \\ \hline \text{habemus } \lambda' = & 170°\,12'\,46'',4 \end{array}$$

quae geocentrica longitudo, cum eo 25 die Septembris anni 1832 convenit; illa autem longitudo praebet latitudinem geocentricam = + 1° 53′; hunc valorem in tabula quaerentibus praebet

$$\begin{array}{rr} & 3°\,31'\,15'' \\ n = & 167\ \ 17\ \ \ 9{,}4 \\ \hline \lambda' = & 170°\,48'\,24'',4 \end{array}$$

illa longitudo pertinet ad 29 diem Septembris anni 1832, transeunte tunc terra per planum annuli a meridie ad septemtrionem.

Quum autem Saturnus circiter die 21 Januarii 1833, motum retrogradum quod ad terram assumit, die 21 Junii sequente attingit geocentricae longitudinis minimum, quod est 170° 17′, quum latitudo geocentrica tunc sit + 2° 22′, quacum tabula praebet

$$\begin{array}{rr} & 4°\,25'\,13'' \\ n = & 167\ \ 17\ \ \ 9{,}4 \\ \hline \lambda' = & 171°\,42'\,22'',4 \end{array}$$

quae est longitudo geocentrica, quam secundum ephemerides 1 die Maji 1833 attingit, quum sit latitudo eodem tempore + 2° 25′, quae secundum tabulam praebet

$$\begin{array}{rr} & 4°\,31'\,15'',5 \\ n = & 167\ \ 17\ \ \ 9{,}4 \\ \hline \lambda' = & 171°\,48'\,24'',9 \end{array}$$

quae longitudo geocentrica cum 27 Aprilis die 1833 convenit.

Cursum suum quod ad terram iterum directo Saturnus incipiens rursus invenitur die 18 Junii 1833 in hac geocentrica longitudine, quum latitudo tunc sit + 2° 16′, cum qua latitudine tabula praebet

$$\begin{array}{rl} & 4^\circ\,14'\,22'' \\ n = & \underline{167\;\;17\;\;\;9\,,4} \\ \lambda' = & 171^\circ\,31'\,31'',4 \end{array}$$

quae geocentrica longitudo cum 10 die Junii convenit, quum geocentrica latitudo sit + 2° 17′, quacum praebet tabula

$$\begin{array}{rl} & 4^\circ\,16'\,14'',5 \\ n = & \underline{167\;\;17\;\;\;9\,,4} \\ \lambda' = & 171^\circ\,33'\,23'',9 \end{array}$$

quae longitudo geocentrica satis accurate convenit cum 11 die Junii 1833, quando iterum annuli planum per terram transit.

Ita ut nobis sit:

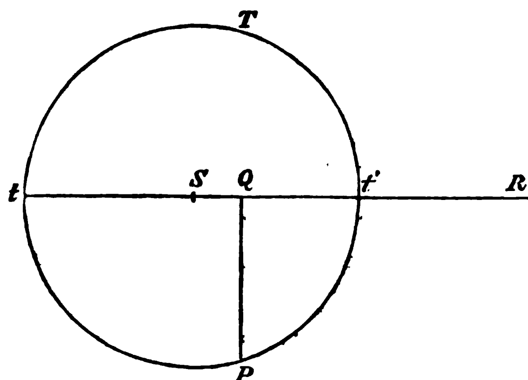
Prima disparitione die 29 Septembris 1832, transit terra a meridie ad septemtrionem.
Prima reapparitione die 5 Decembris 1832, transit sol a meridie ad septemtrionem.
Secunda disparitione die 27 Aprilis 1833, transit terra a septemtrione ad meridiem.
Secunda reapparitione die 11 Junii 1833, transit terra a meridie ad septemtrionem.

Hoc modo invenimus admodum facile annuli phases, in hoc exemplo heliocentricas geocentricasque longitudines atque latitudines, quas in unaquaque disparitione reapparitioneque acquirimus, comparavimus cum iis, quae inveniuntur in ephemeridibus *Astron. Jahrbuch* et *Connaissance des Tems*. Si autem has phases in multos annos computemus, ut exempli gratia in annum 1848, 1862, 1878, 1891, etc.; opus est, ut primo quod ad has periodos per spatium unius anni computentur Saturni ephemerides, scilicet de die in diem, die quoque secundo vel tertio, heliocentricas geocentricasque longitudines latitudinesque Saturni, ut cum his dati eventus comparantur.

§. 11.

Fusissime Dionis du Séjour hanc partem tractavit in operibus suis: *Essai sur les Phénomènes relatifs aux disparitions périodiques de l'anneau de Saturne*, Paris 1776. et *Traité analytique des mouvemens apparens des corps célestes*, Tom. II. Liv. II. Non autem consilium quod mihi proposui sinit totum illud opus hic exponere. Delambre de eo dicit: » cette partie de l'ouvrage est estimée des géo-

» mètres; elle est inutile pour la pratique" (1). Quam vere summus hic Astronomus censeat, non is ego sum, qui dijudicem; confiteri tamen debeo, ejus methodum valde prolixam esse; quare tantummodo mihi proposui, fundamenta, quibus ejus methodus nitatur, communicare.



Ponatur corpus T se movere in circulo quodam T*t*P*t'* celeritate aequabili, eodemque tempore corpus R se aequabili celeritate movere, secundum lineam rectam R*t'*S*t*, quae transit per centrum S circuli; relatio motus corporis T in circulo ad motum corporis R in linea recta cognoscenda est; ut et punctum, quo corpus R adest in recta linea, eo momento temporis, quo corpus T est in puncto *t'*. Proponamus tunc nobis has quaestiones:

1°. Formula inveniatur arcuum, qui a corpore T in sua circuliformi orbita describitur, ab ejus transitu per punctum *t'* usque ad momenta, quibus corpora T et R adsint in una eademque linea recta, quae perpendiculariter in rectilinea R*t* constituta est.

2°. Formula inveniatur arcus, qui a corpore T describitur, ab ejus transitu per punctum *t'*, usque ad tempus, quo corpus R adsit in centro S.

Sit z = arcui *t'*T*t*P a corpore T in ejus orbita circuliformi descripto, ab ejus per punctum *t'* transitu, quod origo motuum assumitur, usque ad momentum, quo corpora T et R adsint in uno eodemque perpendiculo in linea recta R*t* posito.

u = huic respondenti lineae rectae RQ a corpore R in ejus rectilineali cursu descriptae.

$\frac{m}{n}$ = relationi arcus descripti a corpore T in ejus circuliformi orbita, usque ad lineam rectam cum eo respondentem a corpore R descriptam.

a = Distantiae R*t'* a puncto, quo corpus R in linea recta R*t* adest, usque ad punctum *t'*, ubi corpus T adest eodem momento in ejus orbita circuliformi.

Radium orbitae circuliformis = 1 ponentes habemus $z = \frac{m}{n} \times u$; et

(1) Delambre, *Astronomie*, Tom. III. pag. 98.

quum PQ perpendiculariter constituta est in linea recta tSt'; est PQ arcus z sinus et SQ ejus cosinus; tunc est

$$Qt' = 1 - \cos. z; \qquad Qt' = RQ - t'R = u - a;$$

atque ergo

$$u - a = 1 - \cos. z;$$

et quum $u = \frac{n}{m} z$ sit, habemus aequationem

$$\frac{n}{m} z + \cos. z - 1 - a = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Continet illa aequatio omnes casus possibiles, in quibus esse possunt corpora T et R, quando sunt in una eademque linea, quae perpendiculariter in linea tSt' erecta est.

Quando singularem propter occasionem corpus R per centrum S transit, tunc est $z = 90°$ vel $= 270°$, atque ergo $\cos. z = 0$ et $u - a = 1$, habemusque

$$\frac{n}{m} z - 1 - a = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Sunt hae aequationes (1) et (2) fundamentum computationum a Dionis du Séjour propositum, ab eodemque inquiruntur porro illi casus, in quibus prima aequatio, quae transcendentalis est, 1, 3, 5, 7, etc. veras possunt habere radices, quarum numerus dependet a valore a et relatione $n : m$.

Hisce casibus universo modo demonstratis eas applicare coepit particulariter in terram et Saturni annulum, nanciscíturque denique duas sequentes aequationes fundamentales

$$0{,}3142 z + \cos. z - 1 - a = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$
$$0{,}3142 z - 1 - a = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

ita ut nunc verarum radicum numerus a valore a dependeat. Has autem contemplationes non ulterius poterimus persequi, quum eae nimis longe abducerent, separatamque requirerent tractationem, si eas simpliciter atque perspicue exponere vellemus.

Magnum adhuc variarum methodorum numerum commemorare possemus, quae aut valde longae sunt, quarumque altera plus, altera minus cum illa convenit, cujus jam mentionem fecimus; ut solutio graphica Boscovichii, in Tom. V. operum illius; methodus Lamberti in *Berliner Astr. Jahrb.* 1776 pag. 130 seqq.; pulchra disparitionis reapparitionisque theoria reperitur in opere a Littrowio edito *Populäre Astronomie*, Th. II. pag. 134.

Vulgo in astronomicis libris elementaribus hae duae formulae traduntur, quae formam annuli, uti a sole vel a terra conspicitur, proponunt; nempe

$$\frac{b}{a} = sin.\, n\; cos.\, \beta\; sin.\, (k - \lambda) + sin.\, \beta\; cos.\, n.$$

$$\frac{b'}{a'} = sin.\, n\; cos.\, \beta\; sin.\, (k - \mathrm{L}) + sin.\, \beta\; cos.\, n.$$

designantibus a et b, a' et b' semiaxem majorem et minorem annuli; k longitudinem adscendentis nodi annuli; n inclinationem annuli ad eclipticam; λ et β Saturni longitudinem et latitudinem geocentricam; atque L et B Saturni longitudinem latitudinemque heliocentricam.

Si assumimus majorem semiaxem aequalem unitati, latitudinemque Saturni negligimus, quippe quae semper exigua est eventusque non valde mutat, transeunt formulae in sequentes

$$b = sin.\, n\; sin.\, (k - \lambda).$$

$$b' = sin.\, n\; sin.\, (k - \mathrm{L}).$$

quum sit $b = 0$, tunc annulus disparet, id eo quod ejus planum prolongatum per centrum terrae transit; si b positivum est, facies australis annuli ad terram est conversa, quod locum habet, quando $k - \lambda < 180°$ est; si b negativum est, tunc facies borealis annuli ad terram est conversa, quumque sit $k - \lambda > 180°$. Si $b' = 0$ sit, disparet annulus vel apparet tantum ut tenuissimum filum, quia ejus planum prolongatum per solem transit; si b' positivum est, atque ergo $k - \mathrm{L} < 180°$, tunc facies australis annuli sole illuminatur; et si b' negativum sit, atque ergo $k - \mathrm{L} > 180°$ tunc facies borealis annuli illuminatur. — Quando b et b' affecta sunt signis oppositis, annulus terrae invisibilis est, quia tunc a sole facies illuminata annuli a terra aversa est. Ita ut his formulis, formam annuli a sole vel terra visam quoque momento possumus tradere, quando quod ad illud momentum heliocentricam geocentricamque longitudinem Saturni cognoscimus, quia nodorum longitudo ut et inclinatio annuli ad eclipticam cognitae sunt.



CAPUT V.

DE IIS, QUAE OBSERVATIONES DE FORMA DIMENSIONIBUSQUE ANNULI NOS DOCUERUNT.

§. 1.

Ad annum usque 1675 annulus putabatur ex simplici constare corpore. Primus erat CASSINI, qui tubi sui 34 pedum ope, observaret, in duas annulum partes esse divisum, atque exteriorem, quae et angustissima erat, cum interiore in eodem plano sitam, separatamque esse spatio, quod se ut cingulum obscurum in lato plano ostendat.

Confirmabantur hae observationes serius ab Anglicis astronomis SHORT et HADLEY. Ille quidem conjiciebat, annulum vere ex pluribus posse constare circulis concentricis, omninoque putabat, se ope telescopii sui duodecim pedum serius varios concentricos obscuros circulos observasse (1). DIONIS DE SÉJOUR quoque hac erat sententia, cogitabatque etiam eum ex numero cingulorum concentricorum infinito compositum esse, qui omnes dissimili revolverentur celeritate.

Secundum theoriam quam LA PLACE (2) proposuit, ex variis annulis annulus consistere debet, qui sunt solida irregularia corpora, dissimilis latitudinis, qui in variis sui circuitus punctis curvaturam duplicem habent, ita quidem, ut eorum centri gravitatis non coïncidant cum eorum centris figurarum.

§. 2.

Anno demum 1790 HERSCHELIUS persuadebatur in duas annulum partes esse divisum (3). Observationes, quibus ad illam persuasionem ducebatur, hae erant:

---

(1) LA LANDE, *Astronomie*, Tom. III. §. 3352

(2) *Mém. de l'Acad. des Sciences*, 1787.

(3) *Berl. Astr. Jahrb.* 1796, pag. 88. Ubi BODE excerptum praebet orationis ab HERSCHELIO habitae: On the Ring of Saturn and the Rotation of the fifth satellite upon its axis. *Phil. Transact. for the Year* 1792. pag. 1 seqq.

ductus obscurus, quem ante in facie boreali annuli observaverat; per fere 10 annos, in quibus eum observaverat, constanter se eodem monstrabat colore eademque latitudine Diminuebatur latitudo, secundum leges opticas, in planetae disci propinquitate, et quum hic ductus obscurus per multas, quas continuo observaret horas, nullam mutationem praeberet, et semper ab utroque latere, non obstante celeri rotatione, ut deinceps videbimus, excurreret cum eadem majori latitudine, inde sequi debebat, ejus latitudinem ubique circiter aeque magnam esse debere. Manebat etiam obscuritas, iisdem circumstantiis spectata, ejusdem intensitatis. Nunc id adhuc restabat inquirendum, utrum nempe illud phaenomenon etiam in australi annuli facie locum haberet, quod hisce accuratis observationibus decernebatur, postquam nodorum annuli lineam transierat Saturnus.

Die Septembris 7 anni 1790, obscurus annuli ductus, 20 pedum reflectoris ope nondum conspici poterat, neque etiam annulus satis ample apertus erat, ut bene observari posset.

Anni 1791 5 die Augusti, clare se ostendebat in facie annuli australi, ductus ille obscurus, atque etiam in ejus loco relativo, ut ante in facie boreali.

Die Septembris 25, ductus ille, quoad ipsum sequi poterat, in eandem directionem, atque in facie boreali circum annulum currebat.

Die Octobris 13, reflectore 10 pedum et 400 amplificatione cingulum obscurum in annulo maxime perspicue videbat, eandemque latitudinem directionemque, quam in facie boreali, habebat; non tamen tam perfecte obscurus erat, quam spatium interiorem annulum inter planetamque.

Die 24 Octobris, ope excellentis reflectoris septem pedum annuli divisionem aeque nigram atque inter spatium videbat, eodemque colore ac firmamentum extra planetam; ut itidem reflectore 20 pedum; quum cingulum obscurum ab utraque annuli parte aeque latum esset; ad planetam usque id optime sequi poterat. Cum 600 amplificatione usque ad dimidium intervalli obscuri; quod etiam ope 40 pedum reflectoris conspiciebat.

His ex observationibus praecedentibusque animadversionibus Herschel putat jure se posse concludere; *duos habere Saturnum annulos concentricos*, *dissimilis et magnitudinis et latitudinis*, qui verosimiliter inclinationem faciant cum planetae aequatore.

Quod attinet ad nonnullorum astronomorum opinionem, qui dicerent se varias divisiones sive zonas in annulo detexisse, cum ea Herschel consentire non potest; deberet autem annulus continuis mutationibus obnoxius esse, per-

multosque deinceps annos divisum se ostendere, atque tunc in duobus circuli planis conjunctum monstrare, atque tunc esse in statu chaotico, quando tanta illa distantia id definiri posset.

Inter omnes observationes, quas inde ab anno 1774 usque ad 1790 instituebat HERSCHEL, quatuor duntaxat reperiebat, scilicet mense Junii anni 1780, in quibus adhuc aliud obscurum cingulum, quam vulgare sibi videbatur videre. Ostendebat se hoc cingulum valde prope ab interno occidentali latere annuli interioris, admodum autem angustum. In parte interiori orientali nunquam hujus vestigium detegere potuit. In facie annuli australi nunquam plus quam unum cingulum primarium potuit detegere.

Visionem multiplicum annuli divisionum HERSCHEL adscribit ei, quod nonnulla telescopia duplices triplicesque ostendant imagines, inprimis quando amplam habent aperturam, subjectaque sunt palpitationibus, quibus tenues lineae multiplicatae apparent, quo et ipse quidem nonnunquam se deceptum esse fatetur.

§. 3.

Ita CASSINII HERSCHELIIque observationes optime inter se conveniunt; putabat autem HERSCHEL illas dimensionibus differre, quod CASSINI ambos annulos aeque vel fere aeque magnos haberet. Illud vero originem habebat ex minus accuratis LA LANDII LA PLACIIque dictis; quum ille diceret (1): » CASSINI observa » que la largeur de l'anneau étoit divisée en deux parties égales par un trait ob» scur dont la courbure étoit la même que celle de l'anneau, et que la partie » extérieure avoit une lumière moins vive." LA PLACE dicit in opere, *Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne* (2): » M. de CASSINI observa ensuite que » l'anneau dans sa largeur est divisée en deux parties prèsque égales par une » bande obscure d'une courbure semblable à celle de l'anneau." Omninoque consentimus argumentis, quibus VON ZACH CASSINIUM defendit, quippe qui primus duplicem annulum ejusque dimensiones dissimiles ope 34 pedum tubi detexerit (3); et quod LA LANDE commentationem, qua CASSINI de suis observationibus mentionem facit (4), non diligenter legerit, et quod LA PLACE eam omnino non lege-

(4) LA LANDE, *Astronomie*, Tom. III. §. 3351.

(2) *Mém. de l'Acad. des Sciences*. 1787. pag. 249.

(3) *Hanc defensionem legere possumus apud* BODE *Supplement-Band, über dessen Astronomischen Jahrbüchern*, II Band. pag. 38—42.

(4) *Mém. Anciennes*, Tom. X.

rit, sed attenderit ad periodum tractatus **Maraldi**: *Observations sur la phase ronde de Saturne* (1); ubi **Maraldi** divisionem annuli tantum obiter memorat. Quum **Cassini** tamen dicat (2): » Cette apparence donna une idée comme d'un » anneau double, dont l'intérieur plus large et plus obscur, fut chargé d'un plus » étroit et plus clair." Videtur **Cassini** utriusque annuli proportionem statuere ut 1 : 2, dum **Herschel** illam fere ut 1 : 3 statuat, ut patet ex sequentibus **Cassinii** verbis: » Cela fit ressouvenir que l'an 1671 lorsque les bras de Saturne » étoient prets de disparoitre, ils se raccourcirent auparavant, peut-être parce » que la partie extérieure de l'anneau qui étoit simple et obscure disparut avant » la partie intérieure qui étoit double et plus claire (3)."

Etiam **Schröter**, quemadmodum **Herschel**, anno 1793 persaepe annulum bipartitum videbat (4).

§. 4.

Hucusque vero nullam ulteriorem annuli divisionem videntur observasse. Attamen **Biot** (5), velut verba faciens de re in facto posita, nullam tamen auctoritatem afferens, inquit: ut, quando eximiis telescopiis annulus observetur, in ejus superficie inveniri lineas concentricas, nigras valdeque subtiles, quibus in tot parallelos circuitus separari videatur. Sed, addit, ut hanc separationem conspicemur, nobis quam perfectissimi opus sunt tubi optici. Quoniam telescopiis minus perfectis, irradiatione se paulo longius extendente, quam spatio, quod inter unumquemque circuitum occupatur, intervalla, quae eos dirimebant, evanescere facit, eosque ad unum conjungit annulum. Illud anno 1811 dicebat, si ipse hoc non observaverit, profecto animus futuri praesagus ipsi fuit.

Saltem anno demum 1825 id confirmatum esse videtur, atque observationes **Shortii**, ut et theoria **Dionis de Séjour** et **La Placii** probata.

Erat **Kater**, qui, ope telescopii **Watsonii**, (cujus speculum erat 6¼ pollicum anglicorum diametri et foci longitudo 40 talium pollicum, praeterea ejusmodi **Dollondii** diametri 6¾ pollicum anglicorum, atque circiter 68 pollicum foci longitu-

---

(1) *Mém. de l'Acad. des Sciences* 1715. pag. 13.
(2) *Mém. Ancienn.*, Tom. X. pag. 583.
(3) *Confer. Journal des Savans*, 1 Mars 1677. pag. 72. *Versionis Belgicae*, 12°.
(4) *Astron. Jahrb.* 1796. pag. 227.
(5) *Traité élémentaire d'Astronomie Physique*, Tom. III. pag. 95.

dinis,) opinaretur, die Decembris 17 anni 1825 (1), exteriorem annulum separatum se vidisse multitudine divisionum obscurarum, quae divisiones valde compactae videbantur esse. Harum divisionum una, quae exteriorem annulum in duas fere aequales partes dividebat, notabilior reliquis esse videbatur; observabat illud oculari fere 280 amplificationis. Interiore annulo nullas divisiones observabat.

Id, quod videbat, accurate effigie statim expressit, ut videre est fig. 29. Quum adhuc duos secum haberet amicos, utrumque horum rogabat ut etiam adumbrationem ejus, quod conspicati essent, conficerent; alter in exteriore annulo sex observabat subtilissimos ductus ejusdem intensitatis, fere quales illi Kateri, non tamen, medium ceteris graviorem esse. Alter vero magnam tantum in exteriore annulo videbat divisionem; animadvertit autem hic Kater, illum valde myopem fuisse.

Eadem Katerus die Januarii 17 anni 1826 intuitus est phaenomena, neque vero tam perspicue, quam 17 die Decembris praecedentis anni.

Ita secundum Katerum exterior annulus valida, nigra linea in duas partes fere aequales est divisus, quarum utraque praeterea duabus aliis subtilioribus nigris lineis distinguitur.

Allegat quoque Quetelet se mense anni 1823 Decembri, tubi achromatici 10 pollicum aperturae ope *Parisiis* exteriorem annulum divisum vidisse in duos annulos concentricos.

Die Januarii 22 anni 1828 nullum divisionis in exteriore annulo vestigium observare potuit, quod ipsi cogitationem injecit, eam non constantes esse.

Statim post primam suam observationem de ea certiorem faciebat Johannem Herschel, ille vero anni 1826 initio nil hujusmodi observare potuit. Struve (2) quoque *Dorpati* anno 1826 labente, magni Frauenhoferiani refractoris ope nullam annuli exterioris detegere potuit divisionem.

Ut ex praecedentibus scimus, neque Herschelio *patri* contingere licuit, ulteriorem videre divisionem. Quum autem omnes, sicut Katerus exteriorem annulum minus clare quam interiorem viderent, Kater proponit hypothesin, exteriorem nempe annulum forte densam habere atmosphaeram? Nonne, interrogat porro, haec atmosphaera in nonnullis sitibus permittere potest, ut exterioris annuli divisiones trans eam videamus, licet aliis circumstantiis invisibiles sint (3)?

(1) *Memoirs of the Astronomical Society of London*, Vol. IV. Part. II. pag. 384.
(2) *Astr. Nachr.*, Band V. N°. 97.
(3) *Memoirs. supra laudata*, pag. 389.

Hinc undecim anni elabebantur priusquam iterum de exterioris annuli divisione mentio fieret; fuit nocte valde clara 25 Aprilis die, anni 1837, quum Encke (1) in Berolinensi specula magno achromatico tubo Frauenhoferiano 9 pollicum aperturae et 15 pedum foci longitudinis, (cui appositum erat achromaticum oculare novum, a *Mechanico* Duwe confectum, quo ille nanciscebatur 600 amplificationem, insigni campo aliquanto pluris quam 6 minutorum, quo annuli imago se quam maxima fieri poterat accuratione ostenderet,) praeter consuetam divisionem, plane etiam perspicue annulum exteriorem ductu aliquo in duas aequales partes divisum videret. Ostendebat se hic ductus, aeque ac magna divisio per leviter amplificantes tubos observatur. Eum inde ab ulterioribus ansarum finibus usque ad planetae discum fere persequi, atque in utraque ansa aeque distincte conspicere poterat.

Diebus 2, 16 et 19 mensis Maji sequentibus tantum debilibus amplificationibus observari poterat Saturnus. Aëris autem tremor tam vehemens erat, ut ipsam quidem praecipuam divisionem, ultimo die, non certo dimetiri posset.

20 Maji die perspicue iterum videre poterat exterioris annuli divisionem. Eadem quoque a Mädlero observabantur phaenomena, alio autem instrumento. Contra autem ejus amanuensem Galle attentum reddere debebat, ut eam conspicaretur.

Die Maji 28 omnium annuli partium et ut novae divisionis dimensiones Encke determinavit.

Quum ergo et Kater et Encke haec phaenomena in oppositis annuli faciebus observaverint, non dubitandum est, quin verisimilitudo adsit exteriorem annulum revera divisum esse.

Speculae in collegio Romano *Romae Director*, Dumouchel nos certiores facit (2), *Patrem* De Vico in illa specula, vespere 29 diei Maji 1838, praeter duos jam cognitos annulos, valde perspicue vidisse adhuc tres alias divisiones vel nigras lineas, quarum una fere in medio annuli exterioris erat sita, et quod memorabile est, neque ante eum a nemine erat observatum, harum divisionum duas in interiore observabat annulo. Discipuli quoque amicique ibi praesentes hujus rei testes fuerunt.

Sequentium dierum observationes ipsi in zonarum numero variationem praebe-

---

(1) *Astr. Nachr.* N°. 338. *Biblioth. Univers.* N°. 24. Dec. 1837. pag. 404. *Mathematische Abh. der Königl. Akad. der Wissensch. zu Berlin*, vom Jahre 1838. pag. 6 — 9.

(2) *Astr. Nachr.* N°. 357.

bant, quoad aër magis minusve purus clarusque esset. Versus planetae culminationem aliquoties vel sex annuli distinguebantur, idque quidem tali distinctione, ut omnis suspicio tolleretur, illa phaenomena illusioni opticae adscribenda esse.

Ut visus acies probetur, affert adhuc, durantibus observationibus, omnes septem Saturni satellites optime potuisse conspici; quoniam, ut notum est, duo proxime planetam siti valde difficiles observatu sunt.

Ex eo concludendum est, atmosphaerae Romanae claritatem eximie idoneam esse ejusmodi subtilibus observationibus, quoniam ocularia, quibus hic utebantur, ne achromatica quidem erant. Optandum ergo, ut *Pater* De Vico, melioribus instructus instrumentis, observationes suas persequatur, unde multum utilitatis in astronomiam redundare possit.

§. 5.

Quando annulus maximam habet aperturam, nobis se ostendit, fere ut *fig.* 30. Jacent, sicut eos monstrat figura, annuli sibi conjuncti, ut eorum facies, quasi unicum planum constituant, atque ita se ut unicum annulum homogeneum ostendunt, cujus fissura circumcurrens, qua bipartitus fit, parvam habet in apparitionem efficaciam, ita ut eos possimus considerare, ac si unus tantum annulus adesset.

Modicis telescopiis, annulum in disparendo gradatim videmus diminui, atque se quasi a planeta disjungere; quod huic est rei adscribendum, quod illuminatae partes apud B ultimo disparere debent; quia pars illuminata ibi maxima est, atque etiam quia inter pars illuminata B et C non a caeruleo coeli colore separatur: quo fit, ut ambo fines ulteriores ansarum ultimo disparere debeant, primoque iterum visibiles fieri. Hinc sequitur, ut tanquam tales se a planeta disjungere debeant; huc quoque accedit, quod partes angustissimae claritate disci planetae propinqui obscurantur.

Videmus quoque unam ansarum saepe prius quam aliam disparere rursusque apparere, quod secundum Dominicum Cassini huic rei tribuendum est: quia partes, quae hoc in casu lucem reflectunt, non in ipso uno eodemque sitae sunt plano; hoc autem adhuc ulterius tractabimus.

§. 6.

DE ANNULI DIMENSIONIBUS.

Definiebat Hugenius proportionem diametri annuli ad illum Saturni ut 9

ad 4 (1); spatium inter planetam et annulum fere aequale latitudini annuli, eamque latitudinem parti diametri Saturni tertiae.

Pound (2) inveniebat annuli diametrum in distantia media solis = 42″, proportionemque, quae in diametro annuli ad illam planetae ut 7 ad 3.

Rochon (3) ope micrometri sui, 5 die Aprilis anni 1777, e variarum observationum medio 40″,6; nanciscebaturque quod attinet ad diametri annuli proportionem ut 1 ad 0,41626.

Secundum Bode (4) annuli diametrum ad illam Saturni se habet ut 7 ad 3; atque annuli latitudinem aequalem dimidio extremi annuli limitis usque ad planetam, ita ut annuli latitudo aequalis esset distantiae marginis interioris annuli usque ad planetam.

Von Zach (5) sequentes tradit observationes, anno 1788 institutas heliometro Dollondii:

die 3 Julii	34″,327
» 10 Augusti	35 ,076
» 12 »	34 ,748
» 15 »	35 ,013
» 16 »	33 ,896
» 9 Octobris	36 ,339
» 11 »	35 ,387
» 15 »	35 ,529

medium ex iis . . . . 35″,039.

§. 7.

Guillielmus Herschel relativas utriusque annuli magnitudines, eorumque intermedia spatia sequenti modo definiebat (6):

---

(1) Hugenii, *Opera Varia*, Tom. II pag. 590.

(2) La Lande, *Astronomie*, Tom. II. §. 1393.

(3) *Ibidem.*

(4) *Astron. Jahrb.* 1786. pag. 139.

(5) *Astron. Jahrb.* 1793. pag. 95.

(6) *Philosoph. Transact. for the Year* 1792. Part. I. pag. 5. *Astron. Jahrb.* 1796. pag. 90.

Interior minimi annuli diameter	5900	partes.
Exterior » » »	7510	»
Interior maximi » »	7740	»
Exterior » » »	8300	»
Latitudo annuli interioris	805	»
» » exterioris	280	»
» spatii intermedii	115	»

Herschel postea, adjuncto micrometro reflectori 40 pedum, sequentes accuratiores observationes apparentis exterioris annuli diametri, anno 1791, acquirebat (1):

		Diameter annuli.	Ad mediam Saturni distantiam a terra reducta.
die 7 Octobr.	7 Observ.	53″,366	46″.832
» 24 »	2 »	53 ,587	47 ,241
» 21 Nov.	3 »	50 ,492	45 ,803

Duae ultimae observationes institutae sunt reflectore 40, primaeque alio 20 pedum.

Medium ex ultimis ambabus observationibus	46″,522
Cum reflectore 20 pedum	46 ,832
Medium ex omnibus observationibus	46 ,677

Ut ideam praeberet admirabilis annuli circuitus, computavit Herschel sui diametri proportionem ad illam terrae, eventumque nactus est 25,8914 ad 1; ostenderet se annulus distantiâ, quae similis est distantiae terrae ad solem mediae, sub angulo 7′ 25″,332; debetque hinc continere veram 204883 anglicorum milliarium diametrum.

Porro etiam sequentes tradit Herschel dimensiones:

Saturni semidiameter	1,00.
Internus interioris annuli semidiameter . . .	1,66.
Externus » » » . . .	2,11.
Internus exterioris » » . . .	2,17.
Externus » » » . . .	2,33.

unde sequitur,

(1) *Phil. Transact.* 1792. Part. I. pag. 11.

Latitudinem annuli interioris esse	0,45.
» » exterioris »	0,16.
» obscuri spatii intermedii	0,06.
Interioris marginis interioris annuli ad superficiem Saturni distantiam	0,66.

Si multiplicemus has quantitates per 8630, (Saturni semidiametrum in milliaribus geographicis,) tunc has dimensiones in milliaribus geographicis nanciscimur. Easque multiplicantes per 9″, apparentem Saturni semidiametrum in media terrae distantia, accipimus angulos, sub quibus illae nobis in terra apparent quantitates.

§. 8.

Struve *Dorpati* Februario et Martio mensibus anni 1826, diversarum annuli partium dimensiones maxima cum diligentia definivit, ope filo-micrometri refractoris Frauenhoferi decem pedum et ad mediam Saturni a sole vel terra distantiam = 9,53877 semidiametros orbitae terrae deductam, accipitque sequentes eventus (1): vid. Fig. 31.

Externus exterioris annuli diameter sive *ab* =	40″,095
Internus » » » » *cd* =	35 ,289
Externus interioris » » » *ef* =	34 ,475
Internus » » » » *gh* =	26 ,668
Diameter aequatoris Saturni sive *ik* . . . . =	17 ,991
Exterioris annuli latitudo sive *ac* vel *db* . . =	2 ,403
Fissurae latitudo sive *ce* vel *fd* . . . . =	0 ,408
Interioris annuli latitudo sive *eg* vel *hf* . . =	3 ,903
Annuli ad Saturnum distantia sive *gi* vel *kh* =	4 ,339
Radius aequatoris Saturni sive *il* vel *lk* . . =	8 ,995

Hos valores per 950 multiplicantes, sequentes milliaribus geographicis expressas quantitates nanciscimur:

Externam exterioris annuli diametrum . . =	38090,25	Mill.	geogr.
Internam » » » . . . . . =	33524,55	»	»
Externam interioris » » . . . . . =	32751,25	»	»
Internam » » » . . . . . =	25334,60	»	»

(1) *Astron. Nachr.*, B. V. N°. 97. *et ibidem*, B. VI. N°. 139. pag. 392. quo ultimo loco eventus purgati sunt parvo errore.

Diametrum aequatoris Saturni . . . . . . = 17091,45 Mill. geogr.
Exterioris annuli latitudinem . . . . . . = 2282,85 » »
Fissurae latitudinem . . . . = 387,60 » »
Interioris annuli latitudinem . . . . = 3707,85 » »
Annuli ad Saturnum distantiam. . . . . . = 4122,05 » »
Radium aequatoris Saturni . . . . = 8545,25 » »

Ita totus annuli circuitus continet 119693,95 milliaria geographica.

§. 9.

Quoties coeli temperies sineret toties, dimensus est Bessel annuli diametrum et eam Saturni aequatorialem polaremque. Quas dimensiones in *Astronomische Nachrichten* (1) communicat, ut et earum reducta in Saturni ad solem media distantia, cujus distantiae assumebat logarithmum = 0,9796480. Polares diametri Saturni dimensiones, praeter reductionem in media distantia, requirebat adhuc reductionem projectionis sphaeroïdis, ut ea in ejus minori axi videtur, quem acquirimus multiplicatione apparentis polaris diametri per

$$\frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{\sqrt{(1 - e^2 \cos.^2 b)}}.$$

Annis 1832 et 1833 non amplius annuli diametrum dimensus est, quoniam exigua ejus apertura huic rei non idonea esse videbatur.

Ecce observationum eventus:

	Annuli diameter.	Saturni diam. aequ.	Saturni diam. pol.	Reductio ad distantiam mediam a terra.			Observationum numer.		
1829 Dec. 11	43″,26	—	—	38″,91	—	—	2	—	—
21	44 ,40	19″,55	17″,81	39 ,32	17″,31	15″,69	2	1	1
1830 Jan. 12	45 ,09	—	18 ,47	38 ,93	—	15 ,85	1	—	2
21	45 ,80	19 ,53	18 ,42	39 ,31	16 ,76	15 ,71	1	1	1
25	45 ,72	19 ,74	18 ,23	39 ,17	16 ,91	15 ,52	1	1	1
—	45 ,56	19 ,82	18 ,28	39 ,04	16 ,98	15 ,57	1	1	1
26	46 ,20	19 ,82	18 ,68.	39 ,57	16 ,98	15 ,90	1	1	1
—	46 ,07	—	—	39 ,46	—	—	1	—	—
Febr. 1	45 ,93	19 ,95	18 ,31	39 ,30	17 ,07	15 ,56	1	1	1
6	45 ,62	19 ,74	18 ,52	39 ,03	16 ,89	15 ,74	1	1	1

(1) *Astron. Nachr.* B. XII. N°. 275.

		Annuli diameter.	Saturni diam. aequ.	Saturni diam. pol.	Reductio ad distantiam mediam a terra			Observationum numer.		
1830	Febr. 9	45",96	19",68	18",55	39",35	16",76	15",78	1	1	1
	—	45 ,85	—	—	39 ,25	—	—	1	—	—
	14	45 ,64	—	18 ,07	39 ,14	—	15 ,39	1	—	1
	15	46 ,01	19 ,74	18 ,36	39 ,47	16 ,93	15 ,64	1	1	1
	16	45 ,77	19 ,87	18 ,49	39 ,29	17 ,06	15 ,76	1	1	1
	Mart. 1	45 ,88	19 ,63	18 ,31	39 ,32	17 ,01	15 ,75	1	1	1
	—	45 ,47	—	—	39 ,40	—	—	1	—	—
	3	45 ,30	19 ,45	18 ,26	39 ,33	16 ,89	15 ,74	1	1	1
	—	45 ,24	—	—	39 ,28	—	—	1	—	—
	10	45 ,27	19, 58	18 ,02	39 ,62	17 ,13	15 ,65	1	1	1
	14	44 ,90	19 ,53	17 ,91	39 ,49	17 ,18	15 ,64	1	1	1
	—	44 ,79	19 ,74	17 ,97	39 ,40	17 ,13	15 ,69	1	1	1
	15	44 ,69	19 ,18	17 ,78	39 ,36	16 ,89	15 ,54	1	1	1
	16	44 ,45	19 ,42	17 ,89	39 ,20	17 ,13	15 ,66	1	1	1
	17	44 ,63	19 ,82	17 ,70	39 ,42	17 ,06	15 ,52	1	1	1
	Apr. 13	42 ,57	18 ,65	—	39 ,30	17 ,22	—	1	1	—
	18	42 ,31	—	—	39 ,41	—	—	1	—	—
	19	42 ,25	18 ,15	16 ,77	39 ,43	16 ,94	15 ,53	1	1	1
	—	42 ,25	—	—	39 ,43	—	—	1	—	—
	21	42 ,02	18 ,10	16 ,75	39 ,36	16 ,95	15 ,57	1	1	1
1831	Jan. 20	44 ,50	19 ,24	17 ,40	39 ,02	16 ,87	15 ,22	1	1	1
	Febr. 16	45 ,11	19 ,78	—	39 ,01	17 ,10	—	1	1	—
	19	44 ,93	19 ,50	17 ,57	38 ,86	16 ,86	15 ,15	1	1	1
	Mart. 24	44 ,63	19 ,34	—	39 ,51	17 ,12	—	2	2	—
	28	44 ,11	19 ,10	—	39 ,21	16 ,98	—	1	1	—
	Apr. 1	43 ,82	19 ,21	—	39 ,17	17 ,17	—	1	1	—
	10	43 ,71	18 ,67	16 ,99	39 ,60	16 ,91	14 ,99	1	1	1
	12	43 ,51	18 ,75	16 ,88	39 ,54	17 ,04	15 ,28	2	2	2
	21	42 ,76	18 ,08	16 ,75	39 ,45	17 ,39	15 ,40	1	1	1
	27	42 ,60	18 ,39	16 ,81	39 ,72	17 ,15	15 ,61	1	1	3
1832	Febr. 9	—	19 ,15	17 ,03	—	16 ,89	15 ,03	—	2	2
	11	—	19 ,26	16 ,88	—	16 ,97	14 ,87	—	2	2
	13	—	19 ,21	16 ,99	—	16 ,91	14 ,95	—	1	1
	14	—	19 ,26	17 ,29	—	16 ,94	15 ,20	—	2	2
	15	—	19 ,54	17 ,33	—	17 ,18	15 ,23	—	2	2
	17	—	19 ,64	17 ,41	—	17 ,25	15 ,28	—	2	2
	20	—	19 ,63	17 ,37	—	17 ,22	15 ,24	—	1	1

	Annuli diametrus.	Saturni diam. aequ.	Saturni diam. pol.	Reductio ad distantiam mediam a terra.			Observationum numer.		
1832 Mart. 1	—	19″,42	17″,54	—	17″,00	15″,35	—	3	3
11	—	19 ,52	17 ,63	—	17 ,12	15 ,45	—	3	3
16	—	19 ,26	—	—	16 ,93	—	—	1	—
31	—	19 ,40	17 ,25	—	17 ,25	15 ,34	—	3	3
1833 Febr. 22	—	18 ,99	16 ,85	—	16 ,97	15 ,06	—	3	3
23	—	19 ,12	17 ,05	—	17 ,07	15 ,23	—	3	3
—	—	18 ,98	17 ,00	—	16 ,95	15 ,18	—	3	3
27	—	19 ,24	16 ,92	—	17 ,14	15 ,07	—	3	3
Mart. 29	—	19 ,39	17 ,25	—	17 ,26	15 ,36	—	3	3

Eventus medii dimensionum sunt:

Annuli diametrus	39″,311	ex	44	observationibus.
Saturni diametrus aequatorialis .	17 ,053	»	70	»
Saturni diametrus polaris . . .	15 ,381	»	68	»

§. 10.

Ut §. 4 vidimus, nocte 28 Maji anno 1837 novarum dimensionum mensuram Encke definivit; ejus filo-micrometri ope et ad mediam Saturni distantiam reductos nanciscebatur hos eventus (1);

Externam	exterioris annuli diametrum	. . . .	40″,445
Novae subdivisionis diametrum	. . . .		37 ,471
Internam	exterioris annuli diametrum	. . . .	36 ,038
Externam	interioris »	»	34 ,749
Internam	» »	»	26 ,756
Saturni diametrum aequatorialis	. . . .		17 ,519
»	» polaris.		15 ,927

Hic Encke animadvertit, hos valores ostendere videri, divisionis lineam propius interiorem marginem exterioris annuli jacere, quam exteriorem, illum tamen eventum adhuc pro incerto habendum esse, quippe quod suarum dimensionum eventus generaliter majores sint, illis Besseli, Struvique. Cujus diffe-

(1) *Astr. Nachr.* N°. 338. *Biblioth. Univers.* N°. 24. Dec. 1837. pag. 404.

rentiae causam tantum definire poterimus permultarum talium mensurarum comparatione.

§. 11.

Cum ergo Herschelii, Struvei, Besselii, Enckeique eventus inter se conferimus, tunc nobis est, quod ad exterioris annuli diametrum

Secundum	Herschel	41″,94
	Struve	40 ,095
	Bessel	39 ,311
	Encke	40 ,445

quod ad exterioris annuli latitudinem

Secundum	Herschel	1″,44
	Struve	2 ,403
	Encke	2 ,203

atque quod ad interioris annuli latitudinem

Secundum	Herschel	4″,05
	Struvf	3 ,903
	Encke	3 ,996

Apparet inde, satis insigne discrimen adesse quod annuli exterioris diametrum attinet, ut et quoad ejus latitudinem, licet magis exiguum, sed convenientiam majorem esse quod ad interioris annuli latitudinem.

Ut Lamontius (1) jure animadvertit in omnibus hucusque institutis dimensionibus, elementa certa adhuc desunt, efficacia nempe illuminationis annulique rotationis.

Per aperturam lateralem, ut notum est, lucem in tubum penetrare faciunt, eo fine ut fila micrometri collustrata visibilia fiant, campo obscuro relicto, vel contra ut campus illustretur, relinquanturque fila obscura; objecta vero debile illuminata, quando in filorum propinquitatem veniunt, insigniter obscurantur, vel et disparent ipsa. Et quum aliud praeterea obstaculum accedat, quando nobis planities sunt, quarum determinare limites volumus, propter filorum opacitatem non accurate scire possumus, utrum fili medium cum ipso limite, ut linea mathematica cogitato, coincidat; — diligens idemque ingeniosus La-

---

(1; *Jahrb. der Königl. Sernwarte bei München, fur* 1839 pag. 219.

MONT (1) apparatum excogitavit, quem micrometro applicat, cujus auxilio omnia tolluntur obstacula; stellaeque ut et planetarum margines etc., per lineas lucidas perluceant. Hujus apparatus ope mense anni 1838 Julio exterioris annuli diametrum in media Saturni ad terram distantia reductum, definiebat esse

40″,51.

Haec dimensio eâ STRUVEI, BESSELI, ENCKEIque major est.

Animadvertit autem hoc loco LAMONT, minorem annuli ellipseos axem, sicut hic mense Junio 1838 monstrabat, 0″,90 majorem inveniri, quam is secundum BESSELI elementa esse deberet. Quod, se judice, ut ita esset necesse erat, quoniam major minorque axis non aequali proportione amplificatus apparuisset.

Porro inquit, illa permagna discrimina, fundamentum forte suum habere possunt, in annuli proprietatibus (forma rotationeque) vel in tuborum micrometrorumque constructione, vel in atmosphaera vel denique in observatoris oculo.

Illam autem rem magis adhuc considerat, ponendo, quodsi annuli margo nobis non perfecte terminatus appareret, sive quod illa terminatio aliquid indeterminati in se haberet, sive quod propter mobilitatem atmosphaerae, quae saepe locum habet, tenui jubare annulus circumdaretur, tunc quanto accuratior sit oculus et quanto melior tubus opticus, tanto major diameter appareret. Ut suam confirmet sententiam huc affert, solis diametrum majores eventus praebere, quando observationes conjungimus, quae in aëre minus puro factae sunt; atque hoc quidem ita, ut illae a SOLDNERO ab anno 1819 usque ad annum 1822 observatae solis culminationes, iis diebus quando per tenues nubes vel vapores sol observabatur, ab illis distinctis, quum purum esset coelum, diameter medii primarum observationum 1″,1 major inveniretur eo medii ultimarum observationum. Apparentem quoque diametri lunae magnitudinem a luminis intensitate tuborum pendere, ut in determinanda longitudine terrestri per stellarum a luna distantias experti erant; denique etiam quod corporum coelestium diametros oculis senectute debilitatis minores apparere. In *nota* tabulam praebet solis semidiametrorum, a VON LINDENAU computatarum, quas propterea quod valde memorabiles sunt, hic subjungemus

ex BRADLEYI observationibus ab anno 1750 usque ad annum 1752	962″,02
» » » » » 1753 » » » 1755	961 ,97
diminutio	0 ,05

(1) *Jahrb. der Königl. Sternwarte bei München, für* 1840, pag. 190.

Ex Maskelynii observationibus ab anno 1765 usque ad annum 1776 . . 961″,66	}	dimin.
» » » » » 1776 » » » 1787 . . 960 ,22	}	1″,44
» » » » » 1787 » » » 1798 . . 959 ,77	}	0 ,45

eodem modo praebent Besseli observationes

ab anno 1820 usque ad annum 1824 . . 960″,97	}	dimin.
» » 1824 » » » 1828 . . 960 ,82	}	0″,15.

Lamontius quoque in suis observationibus talem diminutionem inveniebat. Ejusmodi, inquit, effectus, qui experientia agnoscantur, certa ratione etiam in Saturni annulo valere, non est, quod dubitemus; attamen, sic pergit, utrum in iis definitionibus, quae exstant, vim aliquam exercerint, nondum solvi potest; animadvertendum vero esse, annuli diametrum tanto majorem inveniri, secundum quod tubi adhibiti luminis sit intensitas. Sic ergo, quod ad Besseli, Struvei suique ipsius definitiones, illis circumstantiis observatis, dimidium tantum heliometrici objectivi operari, nobis est

quod ad lucis intensitatem	1,00	4,50	6,14
annuli diametri	39″,31	40″,09	40″,51.

Atque tunc secundum ipsius sententiam fieri posset, ut huc in re plenam acciperemus certitudinem, quando nempe vitra exstinctoria (*Dämpfgläsern*) adhiberentur, quae ante oculare adaptata, luminis intensitatem, secundum illorum obscuritatis gradum debilitarent; idoneae quoque essent objectivi diminutio aperturae, ad solutionem facere. Atque tunc diametri cum luminis intensitate fere regularis accressio, quae in supra positis numeris apparet, satis rationis afferret, ut inquisitio exerceretur.

DE ANNULI EXCENTRICITATE.

§. 12.

Anni 1828 mense Martio Struve literas accipiebat a Schumachero scriptas, in quibus cum illo communicabat, reperisse Schwabeum Hardingiumque, annulum cum planetae disco non esse concentricum, sed Saturnum aliquatenus esse situm ad partem annuli occidentalem, quod identidem Schumachero visum erat, quare invitaret Struveum, ut illud perscrutaretur magni refractoris ope per mensuras micrometricas. Brevi post Struveus literas ejusdem argumenti, ab Hardingio

scriptas, accipiebat, quocum directe SCHWABEUS suas detectiones communicaverat (1).

Postquam primas acceperat literas, STRUVEUS planetam observabat, videbatque jam cito, spatium intermedium inter planetam et annulum a latere dextro in tubo, habendum esse majus sinistro. Habebat autem hoc phaenomenon primo lusum opticum, quia ab utroque latere occasiones non eaedem erant, posseque huic rei planetae in parte dextra annuli umbram originem dare. Ut ergo illud ulterius inquireret, tales eligebat vesperas, quibus brevi post solem occasum, atmosphaerae conditio valde esset idonea, haberetque ille cum 480 et 600 amplificationibus imaginem clarissimam.

Sunt dimensiones institutae ope micrometri cum filis simplicibus. Quumque annulus a parte interna pejus terminatus esset, quam a parte externa, annulus dimensus est in directionem axis majoris et distantiae suae ab ultima limite ad globi Saturni marginem; quo praeterea constans posset oriri error, unde fieret, ut adhiberi deberet micrometer cum filis simplicibus, quoniam distantia duarum curvaturarum determinari deberet, quae ad idem latus convexae sunt. Si fieri posset, ut adhuc constans exstaret error minimum in locis observatis, propter varios curvaturae radios planetae et annuli ellipseos, necesse est ut ille error in utraque parte planetae aequale sit, et distantiarum differentia hic vacet.

Ecce observationes quomodo a STRUVEO factae sint.

1828.	Observationum numerus.	ad sinistrum in tubo sive ad latus occidentalem.	ad dextrum in tubo sive ad latus orientalem.	amplificationes.
Mart. 29	1	12″,07	12″,25	480
April. 7	2	11 ,58	11 ,90	480
—	3	11 ,74	11 ,91	600
9	4	11 ,47	11 ,85	480
10	2	11 ,77	12 ,08	600
21	3	11 ,36	11 ,59	600

Illas dimensas distantias reducentes ad mediam planetae distantiam = 9,53877, ope logarithmi distantiarum geocentricarum ex planetarum Ephemeridibus SCHUMACHERI, pro hora 6, tempore *Grenovici*, atque distantias parte dextra observa-

(1) *Astr. Nachr.*, Band VI. N°. 139.

tas diminuentes per quantitates, quae originem habeant in Saturni phasibus, scilicet:

0″,050
0 ,050
0 ,050
0 ,050
0 ,049
0 ,045

tunc sequentes quod ad mediam distantiam distantias accipimus

1828	Observationum numerus.	Distantiae sinistrorsum	dextrorsum	$d - s =$
Mart. 29	1	11″,272	11″,390	+ 0″,118
Apr. 7	2	10 ,996	11 ,250	+ 0 ,254
—	3	11 ,148	11 ,260	+ 0 ,112
9	4	10 ,931	11 ,243	+ 0 ,312
10	2	11 ,238	11 ,485	+ 0 ,247
21	3	11 ,060	11 ,238	+ 0 ,178
Medium ex	15	11 ,073	11 ,288	+ 0 ,215

Error probabilis quo $d - s$ affectus est, quod ad unicam observationem continet 0″,095 et quod ad medium ex 15 observationibus, tantum 0″,024; ita ut invento valor 0″,215, novies sit error probabilis, quoniam secundum Struveum nullum exstat dubium excentricitati, quae ex suis observationibus 0″,215 constet ad partem occidentalem; hic est, quod planetae centrum tanto ad occidentem centri annuli situm sit.

Secundum anni 1826 observationes exterior annuli diametrus erat 40″,095 atque aequatorialis Saturni diametrus 17″,991; differentiae dimidium praebens 11″,052 quod ad extremi limitis annuli ad planetam distantiam.

Ultimae observationes, quod ad illud attinet, praebent $\frac{1}{2}$(11″,073 + 11″,288) = 11″,180; itaque differentiam 0″,128. Quae exigua differentia $\frac{1}{8}$″, fortasse constanti est adscribenda errori, qui originem habere potest in variis curvaturae radiis disci planetae et annuli ellipseos in observationum punctis, qui se in primis observationibus compensarent.

§. 13.

Herschel quoque atque South, rogante Hardingii, has instituerunt dimensiones; neque tamen eosdem consecuti sunt eventus (1). Accipiebat Southius, diebus 26, 29 Aprilis et 8 Maji anni 1828, quod ad occidentale spatium intermedium (sinistrorsum in tubo) 3″,532 et quod ad intervallum orientale (dextrorsum in tubo) 3″,607. Huic addit, quod die 26 Aprilis, viginti dimensiones (10 ipsius et 10 Herschelii) aequale omnino praeberent spatium intermedium cujusvis 3″,472. Herschelii dimensiones, quod ad spatium occidentale (sinistrorsum in tubo) praebebant 3″,612 et quod ad orientale 3″,442. South contra accipiebat quod ad occidentale intervallum 3″,331 et quod ad orientale 3″,502; unde medium constet 3″,472. Reperiebat tamen Herschel, animadversione accurate instituta, spatium orientale intermedium absque ullo dubio majus occidentali videri.

§. 14.

Schumacherus ad illud sequentem facit animadversionem (2): illorum virorum, ut et Struvei dimensionum differentiam, verosimiliter huic rei esse adscribendam circumstantiis quae in observando locum habuerint; Herschelium nempe Southiumque intervalla inter Saturnum et interiorem annuli marginem dimensos esse, exterioremque sive dextrum marginem eo tempore fuisse tenacem et non clarum, atque ergo subtiles non concesisse observationes. Quod, ut Schumacherus porro animadvertit, valde mirabile est, quia ipse hoc phaenomenon variis rotationis periodi temporibus observaverat annosque jam ante cum Olbersio communicaverat. Interior annuli margo a parte sinistra semper erat acute terminatus, illeque partis dextrae semper minus clarus. Unde sequitur Struvei observationes propterea primas partes mereri, quoniam suas dimensiones semper instituerit ad annuli marginem exteriorem.

§. 15.

Reperiebat quoque Bessel (3), limitum annuli ultimorum centrum, in parte orientali planetae esse situm; hac de re autem adhuc ulteriores desiderat obser-

---

(1) *Astr. Nachr.* B. VII. N°. 150. pag. 113.
(2) *Astr. Nachr.*, ibidem.
(3) *Astr. Nachr.* B. VIII. N°. 189.

vationes, tanquam illud phaenomenon temporis cursu locum habiturum sit; quum illa excentricitas ipsi non convenire videatur, cum praesentibus naturae hujus corporis notionibus: vel secundum ipsius sententiam supponere debemus, annulum non circa suum rotari axem; vel ex innumerabilibus se libere moventibus constare partibus, quarum orbitae communem habeant lineam absidum.

§. 16.

Interea ante seculum unum et dimidium excentricitas observata videtur a GALLETIO *Avenionensi*. Animadversione dignum est, quod VIETH *Dessaviae* communicat (1), ex *Actis Eruditorum* anni 1684. Qui tractatus sic inscribitur: » *Systema phaenomenorum Saturni*, *autore Galletio*, *Praeposito Avenionensi*, » *etc. Excerptum ex Ephemeridibus Eruditorum Gallicis mensis Junii* 1684. » N°. XVII."

Ubi pag. 144 sequentem legimus periodum:

» Nonnunquam corpus Saturni *non exacte annuli medium obtinere visum fuit;* » id quod semper accidit, quoties Planeta quadràto adspectui cum sole proximus » est, quoniam tunc parallaxis orbis sensu percipi potest. Hinc evenit, ut quum » Planeta orientalis est, centrum ejus extremitati orientali annuli propius videa- » tur, et major pars ab occidentali latere sit cum ampliori obscuritate."

Et pag. 425.

» Certum est, quod cum occidentalis quadratoque proximus erit, occidentali » extremitati annuli proprior videbitur, etc."

Hinc apparet GALLETIUM putasse excentricitatem tantum locum habere, quando Saturnus est in quadraturis suis vel 90° a sole distat, ita ut tunc planeta parte orientali vel occidentali ab annuli centro situs esse videatur, quoad se vel ad occidentem vel ad orientem quadrantem a sole removeat; quod revera etiam locum habet, quando Saturni phases non computamus. Probabile autem est SCHWABEI observationes institutas esse aliquamdiu ante oppositionem, quando quidem parvi momenti est illa efficacia. STRUVEI observationes institutae sunt, circiter quum Saturnus in sua esset quadratura, computat autem STRUVEUS, ut vidimus, phasium Saturni effectus, reperitque praeterea excentricitatem quintuplo vel sextuplo majorem phasium latitudine. Quin etiam, ut OLBERS inquit (2), hujus obscurae phaseos latitudo, propter atmosphaeram planetae, insigni modo major sit, quam eam

(1) *Astr. Nachr.* B. XI. N°. 260. pag. 371.
(2) *Astron. Nachr.*, B. XII. N°. 267. pag 47.

praebeat orbis annui parallaxis, potest tamen illa omnino non tam magna esse, ut constituatur a STRUVEO inventa excentricitas. Optandum tamen manet, ut sunt OLBERSII verba, has quoque observationes diligenter instituant, quando in sua orientali quadratura planeta esset, utrum tunc etiam apparentem excentricitatem planetae in suo annulo, in directione opposita illi anni 1828 observare possent.

Animadvertendum autem interea est, fere incredibile esse, hoc exiguum discrimen, mediocris telescopii ope sine micrometro tantummodo, ut ipsi apparebat, potuisset videre GALLET, quum dimensum a STRUVEO discrimen 300 amplificatione ad minimas quantitates pertineat, quas observare possimus; atque ergo, ut LAMONT animadvertit (1), nulla conditione ut *apparens discrimen* considerari potest.

DE ANNULI CRASSITUDINE.

§. 17.

Quum umbram annuli in planeta, eo tempore, quo disparuit annulus vel tantum margo ejus tenuis a sole illuminatur maxime perspicue distinguere possit, HUGENIUS opinabatur crassitudinem adhuc insignem annulo adesse, quae tamen parum luminis reflecteret. Hanc autem umbram, quam disparente annulo in planeta conspicimus, tali modo explicat LA LANDE (2): quando ad solem directus est annulus solumque in margine ejus tenui illuminatur, necesse est ut terra, quae non in ipso est annuli plano, annulum oblique projectum in Saturnum videat, zonae obscurae formâ, quae latior est annuli crassitudine. Quando annulus ad terram directus, nobis tantum suam offert crassitudinem, eum tunc videre nequimus, sol autem eum oblique illuminat, ita ut etiam in Saturnum insignem umbram dispergat annulus. Annuli planum eodem tempore per solem et terram transire deberet, ut dijudicare possemus, utrum ejus crassitudo visibilem etiam umbram in Saturnum faceret; quum id vero locum habere nequeat, quippe quod Saturni nodus in ecliptica ab sui annuli nodo longe dissitus est. Illa exigua annuli crassitudo a MARALDI quoque et aliis agnoscebatur, qua necesse erat, ut ansae simulac annuli planum per terram vel solem transiret, disparerent.

Ut saepius commemoravimus, absoluta annuli disparitio annis 1789 et 1790 HERSCHELIO locum non habebat, lumen exiguum, quod tenue annuli latus reflec-

---

(1) *Jahrb. der Königl. Sternwarte bei München fur* 1839. pag. 218.

(2) *Astronomie*, Tom. III. §. 3372. pag. 348.

tebat, semper adhuc visibile erat in ejus 40 pedum telescopio, imo in illo 20 pedum; quando terra erat in annuli plano vel fere ibi esset Herschelius saepe satellites in margine annuli tenui projectare vidit, eosque sequi potuit, aeque ac ductu luminoso vel filo luminis, sicut uniones, colligati essent; illud luminis filum tum erat tenue, ut minimus satellitum illud ab utraque parte transgrederetur. Luminis hoc filum, vix quartam apparentis diametri satellitis partem continere videbatur, quam Herschelius existimabat esse 1″. Illud tamen adhuc crassitudinem, quod ad annulum praebebat 239 milliarium geographicorum.

§. 18.

Reperiebat Schröter, die 25 Junii anni 1803 (1) hora vespertina 9, quando disparuerat annulus, 288 amplificatione reflectoris 13 pedum, umbrae annuli in planeta latitudinem, quamvis tenuissimam = 0″,158; hinc propter obliquam annuli illuminationem, deducebat

umbrae annuli latitudinem	= 0″,0148
dimidiam exterioris marginis umbram	= 0 ,0127
dimidiam interioris marginis umbram . , ...	= 0 ,0062
quando omnino non haberet annulus crassitudinem, umbrae latitudo esse deberet	= 0 ,0333
observatur autem illa	= 0 ,158

unde media annuli crassitudo sequitur = 0″,1262
= 0 ,13165 semidiametrorum terrae,
= 113 ,22 milliarium geographicorum.

§. 19.

Ex massa Besselus (2) annuli crassitudinem deducebat, pro qua nanciscebatur $\frac{1}{118}$ illam planetae = 1 statuens. Supponens annulum saturnumque ejusdem esse densitatis annulique massam ubique aequaliter divisam, accipiebat, quod ad annuli crassitudinem 29,7 milliaria geographica. Hanc crassitudinem conjungentes cum dimensionibus a Struveo acceptis, acquirimus, quod ad amborum annulorum volumen 17676105242 milliaria geographica cubica.

---

(1) *Kronogr. Fragmente*, Th. I. pag. 157 et 210
(2) *Astron. Nachr.* B. IX. N°. 193. pag. 46.

§. 20.

Ultimae annuli disparitionis occasione annuli crassitudinem Johannes Herschelius conatus est definire, eratque illi eventus 0",023 sive 21,85 milliaria geographica; unde fit, ut amborum annulorum volumen 13004138767 cubica geographica milliaria contineat.

Ex hisce a se invicem distantibus eventibus videre est, quam difficile sit, tam subtilem omnino observationem instituere.

DE PLANI ANNULI DIRECTIONE.

§. 21.

Hactenus putabatur, annulum paralleliter currere cum planetae aequatore. Opinatur autem Schwabe *Dessaviae*, mense Decembri anno 1832 se observasse (1), illud non esse verum, sed annuli planum a parte occidentali ad meridionalem et a parte orientali ad septemtrionem ab eo discedere, quod videbat, quando ita oculum dirigebat, ut intersecaret planetam annulus Quod etiam conveniebat cum ejus annorum 1828, 1829 et 1830 observationibus, quibus valde perspicue cernebatur, annuli umbram zonasque cinereas planetae ad partem occidentalem convergere et ad partem orientalem divergere; illud tamen phaenomenon non semper sibi constare, sed modo magis, modo minus perspicue observari posse; quod tamen in periodum non conferre poterat. Quae phaenomena ipsi adhuc posterioribus observationibus confirmabantur, ut et mutabilitas in ansarum longitudine et in excentricitate.

§. 22.

Memorabilis est Valtzii *Nemausi* observatio diei 23 Aprilis 1833 (2), annuli nempe planitiem Saturni discum non medium dividere, sed borealem hemisphaeram planetae revera majorem australi videri. Centrum gravitatis corporis Saturni propterea non coincideret cum suae figurae centro, ambaeque hemisphaerae maxime inaequalis essent densitatis.

§. 23.

Schröteri (3) sententia haec est, se omni certitudine ponere posse, annuli pla-

(1) *Astron. Nachr.* N°. 239.
(2) *Astron. Nachr.* B. XI. N°. 243. pag. 41.
(3) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 194.

nitiem non perfectum planum esse, orientales autem occidentalesque ansas vel planities annuli aliquatenus ad se invicem vergere; quod ut dicit Joannes Dominicus Cassini jam anno 1671 suspicatus erat (1).

Fundatur illa positio eo, quod Schröter ejusque comites in observando, per duas observationum series, inde a die 31 Januarii usque ad diem 22 Februarii 1790 atque a 4 die Januarii usque ad 16 diem Junii 1803, orientalem annuli lineam semper subtiliorem, angustiorem et obscuriorem conspicarentur, quam occidentalem annuli lineam, australi facie ad terram conversâ; orientalis serius disparuit seriusque occidentali apparuit; quum contrarium contingeret diebus 3, 4 et 30 mensis Novembris anni 1803, quando quidem tunc borealis facies ad terram conversa esset.

Atqui si illud semper obtinet, pergit Schröterus, hinc sequitur (2): » *dass die* » *Fläche der östlichen Anse um etwas Geringes gegen die Fläche der Westlichen* » *vom Norden nach Süden geneigt ist*, weil sonst diese Wechselseitigen Erschei- » nungen schlechterdings nicht statt finden könnten."

Porro adhuc allegat Schröter (3) sequentes observationes quae hanc videntur positionem confirmare; nimirum: *Eques* Angesii in Sardinia (4) die 24 Augusti 1789, in boreali facie primum orientalem ansam videbat. Die Octobris mensis 15 anni 1789, Darquier *Tolosae* in annuli disparitione tantum adhuc lene ansae orientalis vestigium videbat.

Charles Messier commemorat (5) noctu inter 28 et 29 diem Aprilis 1789, per quatuor horas, se nil amplius nisi leve vestigium ansae orientalis videre posse, quum id esset in facie boreali. Inter diem 29 et 30 Augusti, ut et die 10 Octobris utramque conspicatus est ansam, praebebat autem luminis plus orientalis quam occidentalis.

Tales recentiorum astronomorum complures adhuc observationes afferre possemus; alias tamen, ut videbimus, exinde ducere debemus conclusiones.

Quum ergo, die 16 Junii 1803, hora vespertina 9 et min. 53, T. V. *Lilienthalae* 136 amplificatione 13 pedum reflectoris ope, unicum adhuc punctulum orientalis annuli lineae videret Schröterus, atque conspicaretur occidentalem annu-

(1) Vid. *Mém. de l'Acad. royale des Sciences, de Paris l'an* 1773. pag. 499.
(2) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 196.
(3) *Ibidem.* pag. 198 seqq.
(4) *Connaissance des Tems* 1792. pag. 345.
(5) *Mém. de l'Acad. des Sciences, de l'an* 1790. pag. 423.

li lineam adhuc totam, die autem 18 (non enim die 17 propter aëris intemperiem observare ei licebat), eodem tempore eademque reflectoris amplificatione, nullum omnino totius annuli vestigium, exinde definit ambarum ansarum ad se invicem inclinationem sequenti modo (1):

Die 16 Junii 1803. 9^h 53^m T. V. Saturni longitudinem heliocentricam = 170° 49′ 9″,0
atque latitudinem borealem = 2° 7′ 11″,0
duobus diebus post, Saturni longitudinem heliocentricam . . . = 170° 52′ 46″,8
atque latitudinem borealem = 2° 7′ 15″,4,

unde sequitur:

Plani orientalis annuli lineae intersectio cum eclipticae plano,
vel nodi adscendentis longitudo . . . . = 167° 20′ 1″,1
Intersectionis vel adscendentis nodi occidentalis annuli lineae
longitudo . . . . = 167° 23′ 54″,9
Ita ut ambo nodi ad se vergant cum angulo . . . . = 3′ 53″,8
et ex observato duorum dierum intervallo, ambarum ansarum inclinatio ad se invicem tantum constaret 1′ 49″,2.

Quantam ceteroquin sagacitati SCHRÖTERI fidem habeamus, illas tamen conclusiones non ut veras amplecti possumus, quoniam in illa thesi originem habent; nullum rotatorium motum habere annulum; qua in re postea videbimus errasse SCHRÖTERUM.

CAPUT VI.

DE ANNULI MASSA.

§. 1.

Et annulum et planetam solidas esse massas, umbra probat, quam in planetam projicit annulus et contra planeta in annulum. Die 20 Junii 1778 perspicue vi-

(1) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 207.

debat **Herschelius** (1), planetae umbram in inferiore partis annuli borealis parte, et 11 Maji die 1780, fere in annulo medio infra planetam, in utriusque latere, a sole aversum. Eodem modo die 17 Martii Aprilisque 3, anni 1774, annuli in medio planeta umbram videbat extendentem se ab una marginis ad alteram ejus partem.

Huc etiam accedit vis, quam in satellitum motus exercet annulus; haec autem apparet ex eorum revolventium motuum irregularitate, non alii tribuendâ causae, quam attractioni, quam materiae quantitas annuli propria in hos motus exercet.

§. 2.

Corporum coelestium massam ex effectibus, duntaxat quos producant, definire possumus; ita satellitum massae definiuntur e mutuis eorum affectionibus, id est, e perturbationibus, quae ex eorum attractionibus profluunt. Definire uniuscujusque satellitis massam optimo successu possumus, sumendo maximas quas ii producunt efficacitates; et hunc in finem ex inaequalitatibus uniuscujusque satellitis sumamus unam, quae ceteras longe superet; ejus coëfficientem ergo cum maximo ejusdem inaequalitatis, quae per observationes datur, comparemus; quo facto statim massam, a qua dependeat, invenire possumus. Valores ita inventos in terminis, quos in priore operatione neglexeramus quique ab aliis massis dependent, substituentes, aliquanto accuratiores inveniemus valores.

Per attractionem suam annulus magnam in satellites efficacitatem exercet; eam sequitur lineae absidum motus. Lineae absidum orbitae quarti satellitis motu usus est **Besselus** (2), ad definiendam annuli massam; eo consilio assumebat annuli limites, tanquam circum Saturni centrum, cum radiis ρ et ρ' circulos descriptos, ponebatque annuli massam M ut inter hos circulos aequaliter partitam. Mediam distantiam satellitis per Δ; excentricitatem per e; sidereumque revolutionis tempus per T proponens; sequentem formulam nanciscebatur, quod ad lineae absidum in anno Juliano motum:

$$k = \frac{1296000''.365{,}25}{T} \,.\, M \times \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \frac{3}{2} . \frac{(\rho'^4 - \rho^4) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^2 (1-e)^2} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2} . \frac{3}{4}\right)^2 . \frac{5}{3} . \frac{(\rho'^6 - \rho^6) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^4 (1-e^2)^4} . \left(2 + \frac{3}{2} e^2\right) \right.$$

---

(1) *Philosoph. Transact.* Vol. LXXX. *for the Year* 1790. Part. I. pag. 5.
(2) *Astron. Nachr.*, B. IX. N°. 139. pag. 28.

scriptas, accipiebat, quocum directe Schwabeus suas detectiones communicaverat (1).

Postquam primas acceperat literas, Struveus planetam observabat, videbatque jam cito, spatium intermedium inter planetam et annulum a latere dextro in tubo, habendum esse majus sinistro. Habebat autem hoc phaenomenon primo lusum opticum, quia ab utroque latere occasiones non eaedem erant, posseque huic rei planetae in parte dextra annuli umbram originem dare. Ut ergo illud ulterius inquireret, tales eligebat vesperas, quibus brevi post solem occasum, atmosphaerae conditio valde esset idonea, haberetque ille cum 480 et 600 amplificationibus imaginem clarissimam.

Sunt dimensiones institutae ope micrometri cum filis simplicibus. Quumque annulus a parte interna pejus terminatus esset, quam a parte externa, annulus dimensus est in directionem axis majoris et distantiae suae ab ultima limite ad globi Saturni marginem; quo praeterea constans posset oriri error, unde fieret, ut adhiberi deberet micrometer cum filis simplicibus, quoniam distantia duarum curvaturarum determinari deberet, quae ad idem latus convexae sunt. Si fieri posset, ut adhuc constans exstaret error minimum in locis observatis, propter varios curvaturae radios planetae et annuli ellipseos, necesse est ut ille error in utraque parte planetae aequale sit, et distantiarum differentia hic vacet.

Ecce observationes quomodo a Struveo factae sint.

1828.	Observationum numerus.	ad sinistrum in tubo sive ad latus occidentalem.	ad dextrum in tubo sive ad latus orientalem.	amplificationes.
Mart. 29	1	12″,07	12″,25	480
April. 7	2	11 ,58	11 ,90	480
—	3	11 ,74	11 ,91	600
9	4	11 ,47	11 ,85	480
10	2	11 ,77	12 ,08	600
21	3	11 ,36	11 ,59	600

Illas dimensas distantias reducentes ad mediam planetae distantiam = 9,53877, ope logarithmi distantiarum geocentricarum ex planetarum Ephemeridibus Schumacheri, pro hora 6, tempore *Grenovici*, atque distantias parte dextra observa-

(1) *Astr. Nachr.*, Band VI. N°. 139.

tas diminuentes per quantitates, quae originem habeant in Saturni phasibus, scilicet:

0″,050
0 ,050
0 ,050
0 ,050
0 ,049
0 ,045

tunc sequentes quod ad mediam distantiam distantias accipimus

1828	Observationum numerus.	Distantiae sinistrorsum	Distantiae dextrorsum	$d - s =$
Mart. 29	1	11″,272	11″,390	+ 0″,118
Apr. 7	2	10 ,996	11 ,250	+ 0 ,254
—	3	11 ,148	11 ,260	+ 0 ,112
9	4	10 ,931	11 ,243	+ 0 ,312
10	2	11 ,238	11 ,485	+ 0 ,247
21	3	11 ,060	11 ,238	+ 0 ,178
Medium ex	15	11 ,073	11 ,288	+ 0 ,215

Error probabilis quo $d - s$ affectus est, quod ad unicam observationem continet 0″,095 et quod ad medium ex 15 observationibus, tantum 0″,024; ita ut invento valor 0″,215, novies sit error probabilis, quoniam secundum Struveum nullum exstat dubium excentricitati, quae ex suis observationibus 0″,215 constet ad partem occidentalem; hic est, quod planetae centrum tanto ad occidentem centri annuli situm sit.

Secundum anni 1826 observationes exterior annuli diametrus erat 40″,095 atque aequatorialis Saturni diametrus 17″,991; differentiae dimidium praebens 11″,052 quod ad extremi limitis annuli ad planetam distantiam.

Ultimae observationes, quod ad illud attinet, praebent $\frac{1}{2}$(11″,073 + 11″,288) = 11″,180; itaque differentiam 0″,128. Quae exigua differentia $\frac{1}{8}$″, fortasse constanti est adscribenda errori, qui originem habere potest in variis curvaturae radiis disci planetae et annuli ellipseos in observationum punctis, qui se in primis observationibus compensarent.

§. 13.

Herschel quoque atque South, rogante Hardingii, has instituerunt dimensiones; neque tamen eosdem consecuti sunt eventus (1). Accipiebat Southius, diebus 26, 29 Aprilis et 8 Maji anni 1828, quod ad occidentale spatium intermedium (sinistrorsum in tubo) 3″,532 et quod ad intervallum orientale (dextrorsum in tubo) 3″,607. Huic addit, quod die 26 Aprilis, viginti dimensiones (10 ipsius et 10 Herschelii) aequale omnino praeberent spatium intermedium cujusvis 3″,472. Herschelii dimensiones, quod ad spatium occidentale (sinistrorsum in tubo) praebebant 3″,612 et quod ad orientale 3″,442. South contra accipiebat quod ad occidentale intervallum 3″,331 et quod ad orientale 3″,502; unde medium constet 3″,472. Reperiebat tamen Herschel, animadversione accurate instituta, spatium orientale intermedium absque ullo dubio majus occidentali videri.

§. 14.

Schumacherus ad illud sequentem facit animadversionem (2): illorum virorum, ut et Struvei dimensionum differentiam, verosimiliter huic rei esse adscribendam circumstantiis quae in observando locum habuerint; Herschelium nempe Southiumque intervalla inter Saturnum et interiorem annuli marginem dimensos esse, exterioremque sive dextrum marginem eo tempore fuisse tenacem et non clarum, atque ergo subtiles non concesisse observationes. Quod, ut Schumacherus porro animadvertit, valde mirabile est, quia ipse hoc phaenomenon variis rotationis periodi temporibus observaverat annosque jam ante cum Olbersio communicaverat. Interior annuli margo a parte sinistra semper erat acute terminatus, illeque partis dextrae semper minus clarus. Unde sequitur Struvei observationes propterea primas partes mereri, quoniam suas dimensiones semper instituerit ad annuli marginem exteriorem.

§. 15.

Reperiebat quoque Bessel (3), limitum annuli ultimorum centrum, in parte orientali planetae esse situm; hac de re autem adhuc ulteriores desiderat obser-

---

(1) *Astr. Nachr.* B. VII. N°. 150. pag. 113.
(2) *Astr. Nachr.*, ibidem.
(3) *Astr. Nachr.* B. VIII. N°. 189.

vationes, tanquam illud phaenomenon temporis cursu locum habiturum sit; quum illa excentricitas ipsi non convenire videatur, cum praesentibus naturae hujus corporis notionibus: vel secundum ipsius sententiam supponere debemus, annulum non circa suum rotari axem; vel ex innumerabilibus se libere moventibus constare partibus, quarum orbitae communem habeant lineam absidum.

§. 16.

Interea ante seculum unum et dimidium excentricitas observata videtur a GALLETIO *Avenionensi.* Animadversione dignum est, quod VIETH *Dessaviae* communicat (1), ex *Actis Eruditorum* anni 1684. Qui tractatus sic inscribitur: » *Systema phaenomenorum Saturni*, *autore Galletio*, *Praeposito Avenionensi*, » *etc. Excerptum ex Ephemeridibus Eruditorum Gallicis mensis Junii* 1684. » N°. XVII."

Ubi pag. 144 sequentem legimus periodum:

» Nonnunquam corpus Saturni *non exacte annuli medium obtinere visum fuit;* » id quod semper accidit, quoties Planeta quadrato adspectui cum sole proximus » est, quoniam tunc parallaxis orbis sensu percipi potest. Hinc evenit, ut quum » Planeta orientalis est, centrum ejus extremitati orientali annuli propius videa» tur, et major pars ab occidentali latere sit cum ampliori obscuritate."

Et pag. 425.

» Certum est, quod cum occidentalis quadratoque proximus erit, occidentali » extremitati annuli proprior videbitur, etc."

Hinc apparet GALLETIUM putasse excentricitatem tantum locum habere, quando Saturnus est in quadraturis suis vel 90° a sole distat, ita ut tunc planeta parte orientali vel occidentali ab annuli centro situs esse videatur, quoad se vel ad occidentem vel ad orientem quadrantem a sole removeat; quod revera etiam locum habet, quando Saturni phases non computamus. Probabile autem est SCHWABEI observationes institutas esse aliquamdiu ante oppositionem, quando quidem parvi momenti est illa efficacia. STRUVEI observationes institutae sunt, circiter quum Saturnus in sua esset quadratura, computat autem STRUVEUS, ut vidimus, phasium Saturni effectus, reperitque praeterea excentricitatem quintuplo vel sextuplo majorem phasium latitudine. Quin etiam, ut OLBERS inquit (2), hujus obscurae phaseos latitudo, propter atmosphaeram planetae, insigni modo major sit, quam eam

(1) *Astr. Nachr.* B. XI. N°. 260. pag. 371.
(2) *Astron. Nachr.*, B. XII. N°. 267. pag. 47.

praebeat orbis annui parallaxis, potest tamen illa omnino non tam magna esse, ut constituatur a Struveo inventa excentricitas. Optandum tamen manet, ut sunt Olbersii verba, has quoque observationes diligenter instituant, quando in sua orientali quadratura planeta esset, utrum tunc etiam apparentem excentricitatem planetae in suo annulo, in directione opposita illi anni 1828 observare possent.

Animadvertendum autem interea est, fere incredibile esse, hoc exiguum discrimen, mediocris telescopii ope sine micrometro tantummodo, ut ipsi apparebat, potuisset videre Gallet, quum dimensum a Struveo discrimen 300 amplificatione ad minimas quantitates pertineat, quas observare possimus; atque ergo, ut Lamont animadvertit (1), nulla conditione ut *apparens discrimen* considerari potest.

DE ANNULI CRASSITUDINE.

§. 17.

Quum umbram annuli in planeta, eo tempore, quo disparuit annulus vel tantum margo ejus tenuis a sole illuminatur maxime perspicue distinguere possit, Hugenius opinabatur crassitudinem adhuc insignem annulo adesse, quae tamen parum luminis reflecteret. Hanc autem umbram, quam disparente annulo in planeta conspicimus, tali modo explicat La Lande (2): quando ad solem directus est annulus solumque in margine ejus tenui illuminatur, necesse est ut terra, quae non in ipso est annuli plano, annulum oblique projectum in Saturnum videat, zonae obscurae formâ, quae latior est annuli crassitudine. Quando annulus ad terram directus, nobis tantum suam offert crassitudinem, eum tunc videre nequimus, sol autem eum oblique illuminat, ita ut etiam in Saturnum insignem umbram dispergat annulus. Annuli planum eodem tempore per solem et terram transire deberet, ut dijudicare possemus, utrum ejus crassitudo visibilem etiam umbram in Saturnum faceret; quum id vero locum habere nequeat, quippe quod Saturni nodus in ecliptica ab sui annuli nodo longe dissitus est. Illa exigua annuli crassitudo a Maraldi quoque et aliis agnoscebatur, qua necesse erat, ut ansae simulac annuli planum per terram vel solem transiret, disparerent.

Ut saepius commemoravimus, absoluta annuli disparitio annis 1789 et 1790 Herschelio locum non habebat, lumen exiguum, quod tenue annuli latus reflec-

---

(1) *Jahrb. der Königl. Sternwarte bei München fur* 1839. pag. 218.

(2) *Astronomie*, Tom. III. §. 3372. pag. 348.

tebat, semper adhuc visibile erat in ejus 40 pedum telescopio, imo in illo 20 pedum; quando terra erat in annuli plano vel fere ibi esset HERSCHELIUS saepe satellites in margine annuli tenui projectare vidit, eosque sequi potuit, aeque ac ductu luminoso vel filo luminis, sicut uniones, colligati essent; illud luminis filum tum erat tenue, ut minimus satellitum illud ab utraque parte transgrederetur. Luminis hoc filum, vix quartam apparentis diametri satellitis partem continere videbatur, quam HERSCHELIUS existimabat esse 1″. Illud tamen adhuc crassitudinem, quod ad annulum praebebat 239 milliarium geographicorum.

§. 18.

Reperiebat SCHRÖTER, die 25 Junii anni 1803 (1) hora vespertina 9, quando disparuerat annulus, 288 amplificatione reflectoris 13 pedum, umbrae annuli in planeta latitudinem, quamvis tenuissimam = 0″,158; hinc propter obliquam annuli illuminationem, deducebat

umbrae annuli latitudinem . . . . = 0″,0148
dimidiam exterioris marginis umbram . . . . = 0 ,0127
dimidiam interioris marginis umbram . , ... = 0 ,0062
quando omnino non haberet annulus crassitudinem, umbrae latitudo esse deberet . . . . = 0 ,0333
observatur autem illa . . . . = 0 ,158
unde media annuli crassitudo sequitur = 0″,1262
= 0 ,13165 semidiametrorum terrae,
= 113 ,22 milliarium geographicorum.

§. 19.

Ex massa BESSELUS (2) annuli crassitudinem deducebat, pro qua nanciscebatur $\frac{1}{118}$ illam planetae = 1 statuens. Supponens annulum saturnumque ejusdem esse densitatis annulique massam ubique aequaliter divisam, accipiebat, quod ad annuli crassitudinem 29,7 milliaria geographica. Hanc crassitudinem conjungentes cum dimensionibus a STRUVEO acceptis, acquirimus, quod ad amborum annulorum volumen 17676105242 milliaria geographica cubica.

---

(1) *Kronogr. Fragmente*, Th. I. pag. 157 et 210
(2) *Astron. Nachr.* B. IX. N°. 193. pag. 46.

§. 20.

Ultimae annuli disparitionis occasione annuli crassitudinem JOHANNES HERSCHELIUS conatus est definire, eratque illi eventus 0",023 sive 21,85 milliaria geographica; unde fit, ut amborum annulorum volumen 13004138767 cubica geographica milliaria contineat.

Ex hisce a se invicem distantibus eventibus videre est, quam difficile sit, tam subtilem omnino observationem instituere.

DE PLANI ANNULI DIRECTIONE.

§. 21.

Hactenus putabatur, annulum paralleliter currere cum planetae aequatore. Opinatur autem SCHWABE *Dessaviae*, mense Decembri anno 1832 se observasse (1), illud non esse verum, sed annuli planum a parte occidentali ad meridionalem et a parte orientali ad septemtrionem ab eo discedere, quod videbat, quando ita oculum dirigebat, ut intersecaret planetam annulus Quod etiam conveniebat cum ejus annorum 1828, 1829 et 1830 observationibus, quibus valde perspicue cernebatur, annuli umbram zonasque cinereas planetae ad partem occidentalem convergere et ad partem orientalem divergere; illud tamen phaenomenon non semper sibi constare, sed modo magis, modo minus perspicue observari posse; quod tamen in periodum non conferre poterat. Quae phaenomena ipsi adhuc posterioribus observationibus confirmabantur, ut et mutabilitas in ansarum longitudine et in excentricitate.

§. 22.

Memorabilis est VALTZII *Nemausi* observatio diei 23 Aprilis 1833 (2), annuli nempe planitiem Saturni discum non medium dividere, sed borealem hemisphaeram planetae revera majorem australi videri. Centrum gravitatis corporis Saturni propterea non coincideret cum suae figurae centro, ambaeque hemisphaerae maxime inaequalis essent densitatis.

§. 23.

SCHRÖTERI (3) sententia haec est, se omni certitudine ponere posse, annuli pla-

(1) *Astron. Nachr.* N°. 239.
(2) *Astron. Nachr.* B. XI. N°. 243. pag. 41.
(3) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 194.

nitiem non perfectum planum esse, orientales autem occidentalesque ansas vel planities annuli aliquatenus ad se invicem vergere; quod ut dicit JOANNES DOMINICUS CASSINI jam anno 1671 suspicatus erat (1).

Fundatur illa positio eo, quod SCHRÖTER ejusque comites in observando, per duas observationum series, inde a die 31 Januarii usque ad diem 22 Februarii 1790 atque a 4 die Januarii usque ad 16 diem Junii 1803, orientalem annuli lineam semper subtiliorem, angustiorem et obscuriorem conspicarentur, quam occidentalem annuli lineam, australi facie ad terram conversâ; orientalis serius disparuit seriusque occidentali apparuit; quum contrarium contingeret diebus 3, 4 et 30 mensis Novembris anni 1803, quando quidem tunc borealis facies ad terram conversa esset.

Atqui si illud semper obtinet, pergit SCHRÖTERUS, hinc sequitur (2): » *dass die* » *Fläche der östlichen Anse um etwas Geringes gegen die Fläche der Westlichen* » *vom Norden nach Süden geneigt ist*, weil sonst diese Wechselseitigen Erschei- » nungen schlechterdings nicht statt finden könnten."

Porro adhuc allegat SCHRÖTER (3) sequentes observationes quae hanc videntur positionem confirmare; nimirum: *Eques* ANGESII in Sardinia (4) die 24 Augusti 1789, in boreali facie primum orientalem ansam videbat. Die Octobris mensis 15 anni 1789, DARQUIER *Tolosae* in annuli disparitione tantum adhuc lene ansae orientalis vestigium videbat.

CHARLES MESSIER commemorat (5) noctu inter 28 et 29 diem Aprilis 1789, per quatuor horas, se nil amplius nisi leve vestigium ansae orientalis videre posse, quum id esset in facie boreali. Inter diem 29 et 30 Augusti, ut et die 10 Octobris utramque conspicatus est ansam, praebebat autem luminis plus orientalis quam occidentalis.

Tales recentiorum astronomorum complures adhuc observationes afferre possemus; alias tamen, ut videbimus, exinde ducere debemus conclusiones.

Quum ergo, die 16 Junii 1803, hora vespertina 9 et min. 53, T. V. *Lilienthalae* 136 amplificatione 13 pedum reflectoris ope, unicum adhuc punctulum orientalis annuli lineae videret SCHRÖTERUS, atque conspicaretur occidentalem annu-

---

(1) Vid. *Mém. de l'Acad. royale des Sciences, de Paris l'an* 1773. pag. 499.
(2) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 196.
(3) *Ibidem*. pag. 198 seqq.
(4) *Connaissance des Tems* 1792. pag. 345.
(5) *Mém. de l'Acad. des Sciences, de l'an* 1790. pag. 423.

li lineam adhuc totam, die autem 18 (non enim die 17 propter aëris intemperiem observare ei licebat), eodem tempore eademque reflectoris amplificatione, nullum omnino totius annuli vestigium, exinde definit ambarum ansarum ad se invicem inclinationem sequenti modo (1):

Die 16 Junii 1803. $9^h\ 53^m$ T. V. Saturni longitudinem heliocentricam = 170° 49′ 9″,0
atque latitudinem borealem = 2° 7′ 11″,0
duobus diebus post, Saturni longitudinem heliocentricam . . . = 170° 52′ 46″,8
atque latitudinem borealem = 2° 7′ 15″,4,

unde sequitur:

Plani orientalis annuli lineae intersectio cum eclipticae plano,
vel nodi adscendentis longitudo . . . . = 167° 20′ 1″,1
Intersectionis vel adscendentis nodi occidentalis annuli lineae
longitudo . . . . = 167° 23′ 54″,9
Ita ut ambo nodi ad se vergant cum angulo . . . . = 3′ 53″,8
et ex observato duorum dierum intervallo, ambarum ansarum inclinatio ad se invicem tantum constaret 1′ 49″,2.

Quantam ceteroquin sagacitati Schröteri fidem habeamus, illas tamen conclusiones non ut veras amplecti possumus, quoniam in illa thesi originem habent; nullum rotatorium motum habere annulum; qua in re postea videbimus errasse Schröterum.

CAPUT VI.

DE ANNULI MASSA.

§. 1.

Et annulum et planetam solidas esse massas, umbra probat, quam in planetam projicit annulus et contra planeta in annulum. Die 20 Junii 1778 perspicue vi-

(1) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 207.

debat Herschelius (1), planetae umbram in inferiore partis annuli borealis parte, et 11 Maji die 1780, fere in annulo medio infra planetam, in utriusque latere, a sole aversum. Eodem modo die 17 Martii Aprilisque 3, anni 1774, annuli in medio planeta umbram videbat extendentem se ab una marginis ad alteram ejus partem.

Huc etiam accedit vis, quam in satellitum motus exercet annulus; haec autem apparet ex eorum revolventium motuum irregularitate, non alii tribuendâ causae, quam attractioni, quam materiae quantitas annuli propria in hos motus exercet.

§. 2.

Corporum coelestium massam ex effectibus, duntaxat quos producant, definire possumus; ita satellitum massae definiuntur e mutuis eorum affectionibus, id est, e perturbationibus, quae ex eorum attractionibus profluunt. Definire uniuscujusque satellitis massam optimo successu possumus, sumendo maximas quas ii producunt efficacitates; et hunc in finem ex inaequalitatibus uniuscujusque satellitis sumamus unam, quae ceteras longe superet; ejus coëfficientem ergo cum maximo ejusdem inaequalitatis, quae per observationes datur, comparemus; quo facto statim massam, a qua dependeat, invenire possumus. Valores ita inventos in terminis, quos in priore operatione neglexeramus quique ab aliis massis dependent, substituentes, aliquanto accuratiores inveniemus valores.

Per attractionem suam annulus magnam in satellites efficacitatem exercet; eam sequitur lineae absidum motus. Lineae absidum orbitae quarti satellitis motu usus est Besselus (2), ad definiendam annuli massam; eo consilio assumebat annuli limites, tanquam circum Saturni centrum, cum radiis ρ et ρ' circulos descriptos, ponebatque annuli massam M ut inter hos circulos aequaliter partitam. Mediam distantiam satellitis per Δ; excentricitatem per e; sidereumque revolutionis tempus per T proponens; sequentem formulam nanciscebatur, quod ad lineae absidum in anno Juliano motum:

$$k = \frac{1296000''.365{,}25}{T} \cdot M \times \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{(\rho'^4 - \rho^4) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^2 (1-e)^2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{(\rho'^6 - \rho^6) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^4 (1-e^2)^4} \cdot (2 + \frac{3}{2} e^2) \right.$$

(1) *Philosoph. Transact.* Vol. LXXX. *for the Year* 1790. Part. I. pag. 5.
(2) *Astron. Nachr.*, B. IX. N°. 139. pag. 28.

$$+ \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{(\rho'^8 - \rho^8) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^6 (1 - e^2)^6} \cdot \left(3 + \frac{15}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4\right)$$

$$+ \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{(\rho'^{10} - \rho^{10}) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^8 (1 - e^2)^8} \cdot \left(4 + 21 e^2 + \frac{35}{2} e^4 + \frac{35}{16} e^6\right)$$

$$+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\},$$

in eo $\rho = 13'',374$ et $\rho' = 19'',656$ ponentes atque pro $\Delta = 176'',62537$; $e = 0,02871743$ et $T = 15^d,94545154$ ut ea invenerat, quod ad annuum motum haec praebet formula

$$k = 205682'' \text{M}.$$

Ex observationibus invenitur

$$k = 1744'',699$$

hic autem motus non annulo solum tribui potest, quippe ejus pars quaedam propter sphaeroïdalis planetae ceterorumque satellitum attractionem oritur; quum non omnia, quae ad ejus computationem necessaria sint, cognoscantur, illa tamen portio, quamvis exigua, computari non potest; et tantum ex aequatione

$$205682'' \text{M} = 1744'',699$$

approximativum quod ad annuli massam valorem

$$\text{M} = \frac{1744'',699}{205682''} = \frac{1}{118}$$

nancisci possumus, (ponentes planetae massam = 1). Verus massae annuli valor potius minor esse quam major videtur, quoniam attractiones, de quibus diximus, efficiunt, ut linea absidum se in eandem moveat directionem, in quam eam massa movet. Saturni densitatem = 1 assumentes ponentesque eam annuli = δ, tunc inventus valor M, aequalem massae dispersum supponentes, quod ad annuli crassitudinem praebet

$$\frac{0,031}{\delta}$$

et per 958 multiplicantes in milliaribus geographicis

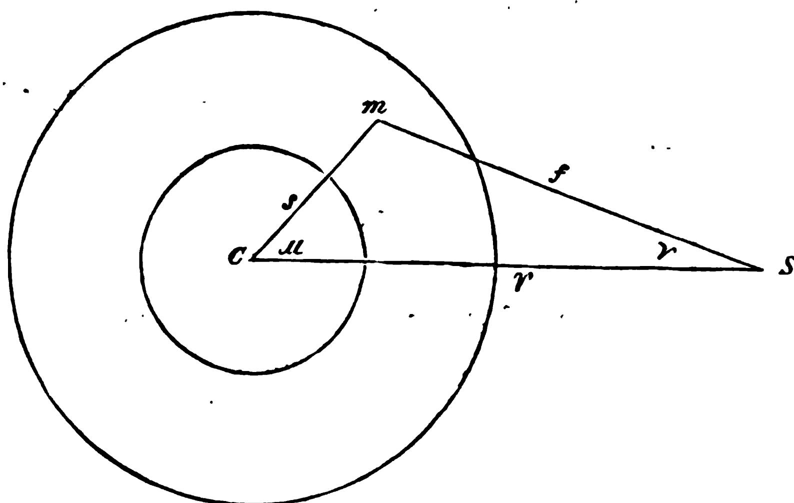
$$\frac{29,7}{\delta}.$$

Licet quoque hic eventus, ut Bessel animadvertit, fundetur quibusdam non

certis suppositionibus, attamen nobis ideam de annuli crassitudine adhuc incognita praebere potest.

§. 3.

Illam Besseli formulam sequenti possumus invenire modo:



Sit $SC = r$ distantia ab annuli centro ad satellitem.

Punctum m, elementum dm annuli.

$Sm = f$, distantia a dm ad attractum punctum S. Tunc est

$$\frac{dm}{f^2}$$

vis, quam elementum dm in punctum A, secundum directionem f exercet, sit $mSC = \gamma$; tunc vis, secundum directionem $SC = r$ decomposita =

$$\frac{dm}{f^2} \cos. \gamma.$$

Sit L vis, quam totus annulus in punctum S exerceat, tunc est

$$L = \int \frac{dm}{f^2} \cos. \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

signum integralis pertinet ad elementum dm et ad quantitates, quae cum ipso variantur, debetqne ad totum annulum extendi.

Assumamus annulum quondam disparentis latitudinis crassitudinisque $= \beta$, quia circa centrum quoddam cum radio ρ descripta est, μ angularem distantiam attractum inter et attrahentem punctum, atque Δ pro elementi densitate, tunc nobis est

$$dm = \beta . \Delta \rho d\mu.$$

Triangulus SCm praebet

$$f^2 = r^2 - 2r\rho \cos. \mu + \rho^2$$
$$r = \rho \cos. \mu + f \cos. \gamma$$

$$\cos.\gamma = \frac{r - \rho \cos.\mu}{f} = \frac{r - \rho \cos.\mu}{\sqrt{(r^2 - 2r\rho \cos.\mu + \rho^2)}}.$$

Hos valores in aequatione (1) substituentes, acquirimus quod ad attractionem in annuli planum

$$L = \int \frac{\beta.\Delta\,(r - \rho \cos.\mu)\,\rho d\mu}{(r^2 - 2r\rho \cos.\mu + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Integralis necesse est, ut sumatur a $\mu = 0$ usque ad $\mu = 2\pi$. Ille integralis facillime hac ratione accipi potest:

Quando functionem

$$\lambda = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos.\mu)^{-\frac{1}{2}},$$

in seriem evolvimus; quoniam habemus

$$d\lambda = -\tfrac{1}{2}(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos.\mu)^{-\frac{3}{2}}\, d.(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos.\mu);$$

$$d.(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos.\mu) = 2rdr - 2\rho \cos.\mu.dr,$$

$$= 2(r - \rho \cos.\mu).dr,$$

$$\frac{d\lambda}{dr} = -\frac{r - \rho \cos.\mu}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos.\mu)^{\frac{3}{2}}};$$

itaque nobis est

$$L = -\Delta\beta \int \left(\frac{d\lambda}{dr}\right) \rho.d\mu.$$

Si loco $\cos.\mu$, ejus valorem in imaginariis exponentibus inducamus, et per e basin logarithmorum hyperbolicorum proponimus, nobis est

$$(r - \rho e^{\mu\sqrt{-1}}) \times (r - \rho e^{-\mu\sqrt{-1}}) = r^2 + \rho^2 - r\rho\,(e^{\mu\sqrt{-1}} + e^{-\mu\sqrt{-1}}),$$

et quum sit

$$\rho^{\mu\sqrt{-1}} + \rho^{-\mu\sqrt{-1}} = 2 \cos.\mu$$

nobis est

$$(r - \rho e^{\mu\sqrt{-1}})\,(r - \rho e^{-\mu\sqrt{-1}}) = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos.\mu,$$

atque ergo

$$\lambda = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos.\mu)^{-\frac{1}{2}} = (r - \rho e^{\mu\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}(r - \rho e^{-\mu\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}$$

hos duos factores evolventes, habemus

$$(r - \rho e^{\mu\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}.\frac{\rho}{r^{\frac{3}{2}}}.\rho^{\mu\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\rho^2}{r^{\frac{5}{2}}}.e^{2\mu\sqrt{-1}} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\rho^3}{r^{\frac{7}{2}}}.e^{3\mu\sqrt{-1}}$$
$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\rho^4}{r^{\frac{9}{2}}}e^{4\mu\sqrt{-1}} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}.\frac{\rho^5}{r^{\frac{11}{2}}}.e^{5\mu\sqrt{-1}} + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}.\frac{\rho^6}{r^{\frac{13}{2}}}.e^{6\mu\sqrt{-1}} + \text{etc.}$$

$$(r-\rho e^{-\mu\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho}{r^{\frac{3}{2}}}\cdot e^{-\mu\sqrt{-1}}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\rho^2}{r^{\frac{5}{2}}}\cdot e^{-2\mu\sqrt{-1}}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\rho^3}{r^{\frac{7}{2}}}\cdot e^{-3\mu\sqrt{-1}}$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\rho^4}{r^{\frac{9}{2}}}\cdot e^{-4\mu\sqrt{-1}}+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{\rho^5}{r^{\frac{11}{2}}}\cdot e^{-5\mu\sqrt{-1}}+\frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\cdot\frac{\rho^6}{r^{\frac{13}{2}}}\cdot e^{-6\mu\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

Has duas series secum invicem multiplicantes, terminosque ordinantes, acquirimus

$$\lambda=\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\rho^2}{r^3}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{\rho^4}{r^5}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{\rho^6}{r^7}+\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\cdot\frac{\rho^8}{r^9}+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho}{r^2}(e^{\mu\sqrt{-1}}+e^{-\mu\sqrt{-1}})+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\rho^2}{r^3}(e^{2\mu\sqrt{-1}}+e^{-2\mu\sqrt{-1}})+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\rho^3}{r^4}(e^{3\mu\sqrt{-1}}+e^{-3\mu\sqrt{-1}})+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\rho^3}{r^4}(e^{\mu\sqrt{-1}}+e^{-\mu\sqrt{-1}})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\rho^4}{r^5}(e^{2\mu\sqrt{-1}}+e^{-2\mu\sqrt{-1}})+\text{etc}$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\rho^5}{r^6}(e^{\mu\sqrt{-1}}+e^{-\mu\sqrt{-1}})+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\rho^6}{r^7}(e^{2\mu\sqrt{-1}}+e^{-2\mu\sqrt{-1}})+\text{etc.}$$
$$+\text{etc.}$$

loco imaginariarum exponentialium quantitatum, earum functiones geometricas iterum substituentes, nanciscimur

$$\lambda=\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\rho^2}{r^3}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{\rho^4}{r^5}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{\rho^6}{r^7}+\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\cdot\frac{\rho^8}{r^9}+\text{etc.}$$
$$+\frac{\rho}{r^2}\cos.\mu+\frac{3}{4}\cdot\frac{\rho^2}{r^3}\cos.2\mu+\frac{3.5}{4.6}\cdot\frac{\rho^3}{r^4}\cos.3\mu+\frac{3.5.7}{4.6.8}\cdot\frac{\rho^4}{r^5}\cdot\cos.4\mu+\text{etc.}$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\rho^3}{r^4}\cdot\cos.\mu+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\rho^4}{r^5}\cdot\cos.2\mu+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\rho^5}{r^6}\cdot\cos.3\mu+\text{etc.}$$
$$+\frac{3}{4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\rho^5}{r^6}\cdot\cos.\mu+\frac{3}{4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\rho^6}{r^7}\cos.2\mu+\text{etc.}$$
$$+\text{etc.}$$

hanc formulam per $d\mu$ multiplicantes atque tunc integrantes, nobis est

$$\int\lambda.d\mu=\mu\left[\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\rho^2}{r^3}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{\rho^4}{r^5}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{\rho^6}{r^7}+\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\cdot\frac{\rho^8}{r^9}+\right]$$
$$+\frac{\rho}{r^2}\sin.\mu+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^2}{r^3}\sin.2\mu+\frac{3.5}{4.6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\rho^3}{r^4}\sin.3\mu+\frac{3.5.7}{4.6.8}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\rho^4}{r^5}\cdot\sin 4\mu+$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\rho^3}{r^4}\cdot\sin.\mu+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^4}{r^5}\cdot\sin 2\mu+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\rho^5}{r^6}\cdot\sin.3\mu+$$

$$+\frac{3}{4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\rho^5}{r^6}.\sin.\mu+\frac{3}{4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^6}{r^7}.\sin.2\mu+$$
$$+\text{ etc.}+\text{Const.}$$

Integralem a $\mu=0$ usque ad $\mu=2\pi$ sumentes, habemus

$$\int\lambda.d\mu=2\pi\left[\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\rho^2}{r^3}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{\rho^4}{r^5}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{\rho^6}{r^7}+\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\cdot\frac{\rho^8}{r^9}+\right],$$

hanc formulam quod ad r differentientes, accipimus

$$\int\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)d\mu=-2\pi\left[\frac{1}{r^2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2.3.\frac{\rho^2}{r^4}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.5.\frac{\rho^4}{r^6}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.7.\frac{\rho^6}{r^8}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2.9.\frac{\rho^8}{r^{10}}+\text{etc.}\right],$$

hunc valorem in

$$L=-\Delta\beta\int\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)\rho d\mu$$

substituentes, habemus

$$L=2\pi\Delta\beta\left[\frac{\rho}{r^2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2.3.\frac{\rho^3}{r^4}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.5.\frac{\rho^5}{r^6}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.7.\frac{\rho^7}{r^8}+\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2.9.\frac{\rho^9}{r^{10}}+\text{etc.}\right].$$

Potest hic annulus considerari, tamquam ex infinito talium annulorum numero compositus. Ut autem ejus attractionem inveniamus, necesse est, ut $Ld\lambda$ inter extremos limites inter ρ integremus, quod non omni accuratione fieri potest, quamdiu nescimus, qualis functio ad ρ pertinens, productum $\beta\Delta$ sit. Quum autem ignoremus hanc functionem, de ea simplicem suppositionem debebimus facere, quod $\beta\Delta$ in omni casu constans sit, vel quod massa in omnibus annuli partibus aequaliter sit divisa.

Formulam, quam ultimo loco invenimus, per $d\rho$ multiplicantes, nobis est,

$$Ld\rho=2\pi\Delta\beta\left[\frac{\rho d\rho}{r^2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2.3.\frac{\rho^3d\rho}{r^4}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.5.\frac{\rho^5d\rho}{r^6}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.7.\frac{\rho^7d\rho}{r^8}.+\right]$$

hanc formulam integrantes, limitesque sumentes inter $\rho=\rho$ et $\rho=\rho'$, acquirimus,

$$\int Ld\rho=2\pi\Delta\beta\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho'^2-\rho^2}{r^2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\rho'^4-\rho^4}{r^4}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{\rho'^6-\rho^6}{r^6}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{\rho'^8-\rho^8}{r^8}+\right]$$

secundum hanc suppositionem annuli massa est

$$m = \Delta\beta\pi\,(\rho'^2 - \rho^2),$$

habemusque ergo quod ad universam annuli in plano attractionem

$$\int L d\rho = \frac{m}{r^2}\Big[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{(\rho'^4 - \rho^4):(\rho'^2 - \rho^2)}{r^2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{(\rho'^6 - \rho^6):(\rho'^2 - \rho^2)}{r^4}$$
$$+ \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{(\rho'^8 - \rho^8):(\rho' - \rho^2)}{r^6} + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{(\rho'^{10} - \rho^{10}:(\rho'^2 - \rho^2)}{r^8} + \Big],$$
$$= \frac{m}{r^2} . \mathrm{K}.$$

Quando quarti satellitis orbita elliptica est, hoc est, quando variabilis est r, tunc series constat ex parte constante et ex parte variabili; prima se conjunget cum massa Saturni, alteraque motum lineae absidum proferet.

Nunc relatio longitudinis lineae absidum differentialis, computata a certo orbitae puncto, hujus est formae:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{A'h}{e}\cos.\phi - \frac{B'r}{he}(2 + e\cos.\phi)\sin.\phi, \text{ (1).}$$

In qua A′ significat vim perturbantem ad focum directam; B′ vim perturbantem perpendicularem in orbitae plano; h semiparametrum; e excentricitatem et ϕ veram anomaliam. Hic nostro in casu, quo $B' = 0$ est, aequatio fit

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{A'h}{e}\cos.\phi,$$

in eo, loco A′ valorem $\int L d\rho$, quem brevitatis causa $= \frac{m}{r^2}.\mathrm{K}$ ponimus, substituentes, nobis est

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{r^2} \cdot \frac{h}{e} . \mathrm{K}\cos.\phi,$$

atque in eo valorem

$$dt = \frac{r^2}{h} . d(\phi + \omega),$$

substituentes, nanciscimur

$$d\omega = m . \frac{\mathrm{K}}{e} . d(\phi + \omega) . \cos.\phi,$$

(1) Vid. Bessel, *Untersuchungen über die scheinbare und wahre Bahn des im Jahre 1807 erschienenen grossen Kometen*, pag. 57. *Königsberger Archiv. für Naturwissenschaft und Mathematik*, 2tes Stück, pag. 140.

$$d\omega - m \cdot \frac{K}{e} \cos.\phi \cdot d\omega = m \cdot \frac{K}{e} d\phi \cdot \cos.\phi,$$

$$(e - m \cdot K \cos.\phi)\, d\omega = mK d\phi \cdot \cos.\phi,$$

$$d\varphi = \frac{mKd\phi \cdot \cos.\phi}{e - mK.\cos.\phi};$$

aut quum quadratum et altiores exponentes ad m pertinentes, negligere possimus

$$d\omega = \frac{m}{e} K \cdot d\phi \cdot \cos.\phi.$$

In formula

$$K = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{(\rho'^4 - \rho^4) : (\rho'^2 - \rho^2)}{r^2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{(\rho'^6 - \rho^6) : (\rho'^2 - \rho^2)}{r^4}$$

$$+ \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{(\rho'^8 - \rho^8) : (\rho'^2 - \rho^2)}{r^6} + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{(\rho'^{10} - \rho^{10}) : (\rho'^2 - \rho^2)}{r^8} + \text{etc.}$$

substituentes

$$r = \frac{\Delta(1 - e^2)}{1 + e \cos.\phi},$$

(quum Δ sit media satellitis distantia) nanciscimur

$$K = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{(\rho'^4 - \rho^4)(\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^2 (1 - e^2)^2}(1 + e \cos.\phi)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{(\rho'^6 - \rho^6) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^4 (1 - e^2)^4}(1 + e \cos.\phi)^4$$

$$+ \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{(\rho'^8 - \rho^8) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^6 (1 - e^2)^6}(1 + e \cos.\phi)^6 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{(\rho'^{10} - \rho^{10}) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^8 (1 - e^2)^8}(1 + e \cos.\phi)^8 +$$

eorum duntaxat terminos sumamus, quae a ϕ dependeant, quippe qui solum sunt variabiles; nobisque est

$$K = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{(\rho'^4 - \rho^4) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^2 (1 - e^2)^2} [(1 + e \cos.\phi)^2 - 1]$$

$$+ \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{(\rho'^6 - \rho^6) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^4 (1 - e^2)^4} [(1 + e \cos.\phi)^4 - 1]$$

$$+ \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{(\rho'^8 - \rho^8) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^6 (1 - e^2)^6} [(1 + e \cos.\phi)^6 - 1]$$

$$+ \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{(\rho'^{10} - \rho^{10}) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^8 (1 - e^2)^8} [(1 - e \cos.\phi)^8 - 1]$$

$$+ \text{etc.}$$

brevitatis causa, coëfficientes $=$ A, B, C, D, etc. ponentes, habemus

$$K = A\,[(1 + e \cos.\phi)^2 - 1] + B\,[(1 + e \cos.\phi)^4 - 1] + C\,[(1 + e \cos.\phi)^6 - 1]$$
$$+ D\,[(1 + e \cos.\phi)^8 - 1] + \text{etc.}$$
$$= A\,(2e \cos.\phi + e^2 \cos.^2\phi)$$
$$+ B\,(4e \cos.\phi + 6e^2 \cos.^2\phi + 4e^3 \cos.^5\phi + e^4 \cos.^4\phi)$$
$$+ C\,(6e \cos.\phi + 15e^2 \cos.^2\phi + 20e^3 \cos.^3\phi + 15e^4 \cos.^4\phi + 6e^5 \cos.^5\phi + e^6 \cos.^6\phi)$$
$$+ D\,(8e \cos.\phi + 28e^2 \cos.^2\phi + 56e^3 \cos.^3\phi + 70e^4 \cos.^4\phi + 56e^5 \cos.^5\phi + 28e^6 \cos.^6\phi$$
$$+ 8e^7 \cos.^7\phi + e^8 \cos.^8\phi)$$
$$+ \text{etc.}$$

nobisque ergo est

$$d\omega = m d\phi\,[A\,(2 \cos.^2\phi + e \cos.^3\phi)$$
$$+ B\,(4 \cos.^2\phi + 6e \cos.^3\phi + 4e^2 \cos.^4\phi + e^3 \cos.^5\phi)$$
$$+ C\,(6 \cos.^2\phi + 15e \cos.^3\phi + 20e^2 \cos.^4\phi + 15e^3 \cos.^5\phi + 6e^4 \cos.^6\phi + e^5 \cos.^7\phi)$$
$$+ D\,(8 \cos.^2\phi + 28e \cos.^3\phi + 56e^2 \cos.^4\phi + 70e^3 \cos.^5\phi + 56e^4 \cos.^6\phi + 28e^5 \cos.^7\phi$$
$$+ 8e^6 \cos.^8\phi + e^7 \cos.^9\phi)$$
$$+ \text{etc.}\,]$$

hanc aequationem integrantes, acquirimus:

$$\omega = m\,[A\,(\frac{1}{2} \sin.2\phi + \phi + \frac{1}{12} e \sin.3\phi + \frac{3}{4} e \sin.\phi)$$
$$+ B\,(\sin.2\phi + 2\phi + \frac{1}{2} e \sin.3\phi + \frac{9}{2} e \sin.\phi + \frac{1}{8} e^2 \sin.4\phi + e^2 \sin.2\phi + \frac{3}{2} e^2\phi$$
$$+ \frac{1}{80} e^3 \sin.5\phi + \frac{5}{48} e^3 \sin.3\phi + \frac{5}{8} e^3 \sin.\phi)$$
$$+ C\,(\frac{3}{2} \sin.2\phi + 3\phi + \frac{5}{4} e \sin.3\phi + \frac{45}{4} e \sin.\phi + \frac{5}{8} e^2 \sin.4\phi + 5e^2 \sin.2\phi + \frac{15}{2} e^2\phi$$
$$+ \frac{3}{16} e^3 \sin.5\phi + \frac{25}{16} e^3 \sin.3\phi + \frac{75}{8} e^3 \sin.\phi + \frac{1}{32} e^4 \sin.6\phi + \frac{9}{32} e^4 \sin.4\phi$$
$$+ \frac{45}{32} e^4 \sin.2\phi + \frac{15}{8} e^4\phi + \frac{1}{448} e^5 \sin.7\phi + \frac{7}{320} e^5 \sin.5\phi + \frac{7}{64} e^5 \sin.3\phi + \frac{35}{64} e^5 \sin.\phi)$$
$$+ D\,(2 \sin.2\phi + 4\phi + \frac{7}{3} e \sin.3\phi + 21e \sin.\phi + \frac{7}{4} e^2 \sin.4\phi + 14e^2 \sin.2\phi + 21e^2\phi$$
$$+ \frac{7}{8} e^3 \sin.5\phi + \frac{175}{24} e^3 \sin.3\phi + \frac{175}{4} \sin.\phi + \frac{7}{24} e^4 \sin.6\phi + \frac{21}{8} e^4 \sin.4\phi + \frac{105}{8} e^4 \sin.2\phi$$
$$+ \frac{35}{2} e^4\phi + \frac{1}{16} e^5 \sin.7\phi + \frac{49}{80} e^5 \sin.5\phi + \frac{49}{16} e^5 \sin.3\phi + \frac{245}{16} e^5 \sin.\phi$$

$$+\frac{1}{128}e^6 \sin.8\phi + \frac{1}{12}e^6 \sin.6\phi + \frac{7}{16}e^6 \sin.4\phi + \frac{7}{4}e^6 \sin.2\phi + \frac{35}{16}e^6\phi$$

$$+\frac{1}{2304}e^7 \sin.9\phi + \frac{9}{1792}e^7 \sin.7\phi + \frac{9}{320}e^7 \sin.5\phi + \frac{7}{64}e^7 \sin.3\phi + \frac{63}{128}e^7 \sin.\phi)$$

$$+ \ldots\ldots]$$

Integralis inter $\phi = 0$ et $\phi = 2\pi$ sumentes, nanciscimur

$$\omega = 2\pi m\ [A + B(2 + 3e^2) + C(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4)$$

$$+ D(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^5) + \text{etc.}]$$

Rursus suis locis ponentes coëfficientes, habemus, quod ad lineae absidum in anno Juliano motum

$$\omega = \frac{1296000''.365,25}{T}.m.\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{3}{2}.\frac{(\rho'^4 - \rho^4):(\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^2(1-e^2)^2}\right.$$

$$+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\frac{5}{3}.\frac{(\rho'^6 - \rho^6):(\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^4(1-e^2)^4}\left(2 + \frac{3}{2}e^2\right)$$

$$+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.\frac{7}{4}.\frac{(\rho'^8 - \rho^8):(\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^6(1-e^2)^6}\left(3 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4\right)$$

$$+\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2.\frac{9}{5}.\frac{(\rho'^{10} - \rho^{10}):(\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^8(1-e^2)^8}\left(4 + 21e^2 + \frac{35}{2}e^4 + \frac{35}{16}e^5\right)$$

$$\left. + \text{etc.}\ldots\ldots\right\}.$$

Quae formula invenienda erat.



CAPUT VII.

DE PHYSICA ANNULI CONSTITUTIONE.

§. 1.

De physica annuli vel annulorum constitutione perpauca scimus. Eos esse corpora haud pellucida ex umbra obscura, quam in Saturnum, contraque Saturnus in ipsos projicit, patet.

Quod ad annuli naturam, inquit HERSCHEL (1), certum habere nobis licet, eum non minus solidum essentialemque quam ipsum planetam esse. Eaedem rationes, quae nobis hujus soliditatem probant, valent quoque de illo; quandoquidem corporis Saturni in annulo umbram videmus, vicissimque annuli umbram in planeta, habita ratione solis situs quod ad illa corpora.

Secundum HERSCHEL etiam valde est perspicuum, insignem esse annuli in satellitum revolutiones efficaciam; quoniam invenimus, eos irregularitatum multitudine in eorum motibus affici, quae non satis recte alii causae tribuendae sunt, quam materiae quantitati, ex qua constet annulus atque elevationi massae Saturni aequatoriali.

Hic tantum commemorabimus quarum conclusionum causam observationes dederint.

Hucusque ut satis certum statuere poteramus, in duas annulum partes esse divisum, nonnullae tamen praecedentium 15 annorum observationes ad verosimilitudinem ducebant multiplicis divisionis (2). In suis observationibus ENCKE adhuc valde singulare animadvertebat phaenomenon; die nempe 25 Aprilis anni 1837 ope refractoris magni, novo achromatico oculari instructi Duwesio, amplificatione 600, in interiore annuli margine umbram videbat satis largam, quae se sensim sensimque in unicum punctum contraheret, periretque in utramque superficiei

(1) *Phil. Transact.* Vol. LXXX. 1790. Part. I. pag. 4.
(2) Vid. Cap. V. §. 10.

annuli ansam, obrotundationis speciem referens. Porro adhuc distinguebat certum subtilium linearum numerum, et fere parallelae erant obrotundationi interiori, quae, quatenus se in annuli superficiem extenderent, umbram intersecabant. Hoc phaenomenon inprimis obtinebat in annuli parte occidentali sive a parte tubi sinistra. Die 20 Maji ej. anni subtiles illas lineas non amplius distinguere poterat (1).

Illud phaenomenon Kater quoque vidisse videtur, quoniam ex eo asserit, adspectum marginum interiorum interioris annuli talem esse, ut dubitari nequeat, quin sint obrotundati.

De annulorum obrotundatione persuasum quoque sibi habebat Lamont (2), quum anno 1838 conjunctionem cum sole appropinquaret Saturnus, planetaque insignem in interiorem annulum umbram projiceret, quando in refractore observabat magna cum perspicuitate, umbrae terminationem non talem esse, qualis esse deberet, si annuli planities planum adaequatum formasset. Valde insigniter flectebatur umbra ad internos externosque margines peribatque in annuli obscura terminatione.

Multum nos docere posset planetae in annulo umbra, quod ad annuli superficiei formam. Quia vero in illis casibus, ut dimensioni idonea sit umbra, se non ad externum annulum extendit; difficile erit, ut eo ulterius nobis cognita fuit planitie externi annuli forma. Propter Saturni atque terrae solis ratione habita situm, semper tantum parvam umbrae partem videmus, quam in annulum planeta projicit, velut maculam vel ductum obscurum ad orientem vel occidentem planetae, dum maxima umbrae pars in aversum planetam cadit.

§. 2.

Jam pridem observabatur in disparendo annulum ab altero planetae latere multo serius, quam ab altero latere disparere, et in reapparendo prius videri posse. Quod etiam Cassinum (3) non fugerat.

Saepe videmus ansas breviores fieri partimque invisibiles partimque visibiles seque a planeta separare.

Sic verbi causa Maraldi (4) inde a die 25 Septembris mensis usque ad 30 anni

---

(1) *Astr. Nachr.* N°. 338. *Biblioth. Univers.* N°. 24. Dec. 1837. pag. 404.

(2) *Jahrb. der Königl. Sternwarte bei München*, *fur* 1839. pag. 220.

(3) Vid. Cap. V. §. 5.

(4) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année MDCCXV. pag. 12.

1714, 34 pedum tubi ope non notabile inter duas ansas discrimen videbat; die Octobris 1 ipsi videbatur ansa orientalis paulisper latior occidentali, quod adhuc diebus 3, 5 et 7 Octobris obtinebat. Etiam ab eo observatum fuit, quo angustiores ansae fierent, vel annulus se magis contraheret, eo etiam breviores fieri ita ut die 9 Octobris dimidio breviores, quam solent esse, judicaret, quum pars orientalis latior occidentali appareret. Die Octobris 12 Saturnus unica ansa praeditus a parte occidentali apparebat.

Die 29 Novembris anni 1743 Heinsius observabat brachium orientale occidentali brevius esse.

Die Octobris 6 anni 1773, *Gadibus* ansa duntaxat occidentalis observabatur.

Die 11 Januarii 1774, Messier a planeta ansas separatas videbat, ansamque orientalem occidentali longiorem. Herschel quoque anno 1774 Saturnum videbat una tantum ansa praeditum.

Schröter (1) die Januarii 31 anni 1790 annuli orientalem lineam multo minus latam quam occidentalem videbat.

Januario mense anni 1803 Schröter, Lüder atque Harding (2) annuli orientalem lineam obtusiorem, debiliorem minusque distinguendam occidentali videbant.

Schwabe *Dessaviae* mense Decembri anni 1832 occidentalem ansam paululo breviorem, aliquatenus clariorem latioremque, obtusiorem vero quam orientalem, quae angustior, acutior et, ut ipsi videbatur, aliquatenus lucidior erat (3). Mensibus Februario Martioque anni 1833 Scwabe ansam occidentalem continuo magis minusve breviorem videbat, latiorem, aequabiliter claram, sed aliquanto magis inaequalem obtusioremque orientali, quae jam plus minusve longior erat, aliquanto angustior, acutior, et si non fallebatur, splendidior (4).

Breslaviae anni 1833 mense Aprili von Boguslawski ambas ansas nonnunquam videbat aequali claritate, aliquandoque occidentalem acutiorem magisque perspicuam orientali (5).

Ejusmodi quoque observationes commemorat Bianchi *Cattajone* (6).

Sic Wartman conspicatus est *Genevae*, die 5 Julii anni 1833, insignes inaequalitates in annulo, utramque ansam apud planetam abruptam (7).

---

(1) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 36. (2) *Ibidem*, pag. 56.
(3) *Astr. Nachr.*, N°. 239. N°. 383.
(4) *Ibidem*, B. XI. *Beilage zu* N°. 249. pag. 153.
(5) *Astron. Nachr.* N°. 252. pag. 209 seqq.
(6) *Ibidem.* N°. 249. pag. 149.
(7) *Biblioth. Univers.* Avril 1834. pag. 345.

Quod ad unius harum ansarum citiorem disparitionem vel reapparitionem, hujus causa, secundum Cassini, esse videtur, quod annuli partes, quae tali in casu lumen reflectunt, non in uno eodemque plano sunt sitae. Aut dicendum erat, ubique ejusdem crassitudinis annulum non esse.

Quod breviores fiant ansae et se a planeta separent, hujus rei hanc physicam dat rationem Dionis de Séjour (1): illam nempe annuli partem, quae fere aequali distantia a Saturni margine et annuli finibus sita est, plurimam solis lucem reflectere; quae ergo pars necesse est, ut ultima dispareat; quo ergo annuli ansae breviores fieri debent et a planeta disrumpuntur, antequam omnino dispareant.

Praecipua autem causa, qua ansae breviores fiant, haec habenda est, quod ellipsis, quae annulo formatur, ad extremitates angustior fiat; necesse tunc est, ut eae prius dispareant, quam illae partes, quae ad medium magis jacent, quaeque sunt latiores magisque apertae; praeterea specialis illa annuli conformatio suam quidem efficaciam quoque exercebit.

§. 3.

DE ANNULI LUMINE.

Plerumque annulus se clarioris candidiorisque luminis quam planeta ostendit, quantumcunque splendorem Saturnus possideat. De eo persuasum erat Herschelio (2); quoniam ambo objecta fortiori semper amplificatione intuebatur, ita ut die 19 Aprilis anni 1777 annuli partem meridionalem, quae per planetam transibat, multo clariorem videret, quam Saturni discum, in quo illam projectam erat; et 27 ejusdem mensis die, 410 amplificatione sui 7 pedum reflectoris vix satis luminis Saturno inveniebat, dum tamen abunde clarus annulus esset. Die Martis 11 anni 1780, deinceps experimenta capiebat 222, 332 et 449 amplificationibus, reperiebatque Saturni lumen minus forte, illo annuli; ultima illa amplificatione flavo colore se obferebat planeta, dum albus manebat annulus. Eundem eventum nactus est 25 die Junii 1781 amplificatione 400.

Animadvertebat quoque Herschelius (3) exteriorem annulum non tantum luminis praebere, quantum interiorem. Quum hic prope fissuram nonnunquam esset

---

(1) Dionis de Séjour, *Essai sur les phenomènes etc.* pag. xxiii.

(2) *Philosoph. Transact.*, Vol. LXXX. For the Year 1790. Part. I. pag. 5.

(3) *Ibidem*, for the Year 1794. Part. I. pag. 58.

valde clarus et fere in latitudinis medio colorem mutare inciperet, sensim fit languidior, et in ipsa interiore margine fere ejusdem erat coloris, qualis est obscura quintuplicis ductus planetae pars. Ecce illius verba: »The outer ring is less »bright than the inner ring. The inner ring is very bright close to the dividing »space; and, at about half its breath, it begins to change colour, gradually »growing fainter; and just upon the inner edge, it is almost of the colour of the »dark part of the quintuple belt."

Idem quoque 30 die Novembris anni 1825 a KATER observabatur (1).

CASSINI (2) etiam reperit exteriorem annulum minus splendidum lumen interiore habere.

GRUITHUIZEN (3) excellenti a FRAUENHOFERO confecto refractore, 136 amplificatione, exteriorem obscuriorem annulo interiori videbat.

Manifestum est, inquit STRUVEUS (4), quanto minorem splendorem exterior quam interior annulus habeat. Videtur quoque annulus interior planetam versus minus acute terminatus esse, aliquantoque obtusioris luminis fieri, ita ut STRUVEUS suspicaretur, mediam illam terminationem minus regularem altera esse.

Valde singulare esse animadvertit SCHUMACHER (5), marginem interiorem dextrum semper languidum minusque spectabilem esse; quum hoc phaenomenon variis rotationis periodi temporibus et aliquot jam annis ante cum OLBERSIO communicavisset. Interior annuli margo ad partem sinistram semper erat acute terminatus, atque ille ad partem dextram semper minus perspicuus.

DIONIS DE SÉJOUR (6) ad aliorum judicium provocat, num utraque annuli facies tantumdem luminis reflectat. Australem faciem plus luminis reflectere boreali opinatur. Id autem definitu difficile erit, quoniam has facies non simul inter se comparare possumus.

HERSCHEL porro adhuc animadvertit, annuli tenuem marginem, quam per disparitionem videbat, minus luminis reflectere, quam quod ab ejusmodi crassitu-

---

(1) *Mémoirs of the Astr. Soc. of London*, Vol. IV. Part. II. pag. 383.

(2) *Mém. de l'Acad. des Sciences*, année MDCCXV. pag. 13. LA LANDE, *Astronomie*, Tom. III. §. 3351.

(3) BODE, *Astr. Jahrb.* 1817. pag. 186.

(4) *Astr. Nachr.* B. V. N°. 97.

(5) *Ibidem*, B. VIII. N°. 189.

(6) *Essai sur les phénom. rel. aux disp. period. de l'anneau de Saturne*, pag. XXIII.

dine, qualiscunque tandem sit, expectaremus; fortasse obrotundatio vel inaequalitates ad illud conferant.

INAEQUALITATES IN ANNULO.

§. 4.

Conspiciuntur in annulo, quum in eo est, ut dispareat, aliquot puncta illuminata, quae locis obscuris alternantur; quod ergo eo nos ducere debeat, ut concludamus, annulum superficiei esse non adaequatae, sed montibus excelsitudinibusque obtectae.

Per annuli disparitiones ac reapparitiones annis 1773 et 1774, MESSIER (1) optimis instrumentis munitus, inde a primo die Julii anni 1774, quum iterum visibilis coeperit annulus esse, multis diebus continuis, puncta lucida in ansis vidit, quibus quasi conspersus annulus videbatur, quae referebant lumen albidum, vivum et splendentem, velut stellae minutissimae per optima instrumenta conspectae; ipsi non omnia aeque lucida apparebant, multaque a se invicem sejuncta visa sunt. Non possunt, inquit MESSIER, hi effectus nonnullis satellitibus tribui, qui in ansis positi essent; illa lumina ad hoc usque tempus ipsi quoque nimis constantia apparuerant, conspicabaturque illa nimis saepe nimiaque multitudine, quam ut annulo non adaptata forent.

Postea dicit MESSIER (2), observationibus punctorum lucidorum saepius repetitis, satis probari posse, Saturni annulum terram esse qualemcunque iisdem, quibus luna inaequalitatibus instructam: illasque plus minusve luminis accipere quam annuli reliquas partes, non videri posse, nisi in ejusmodi circumstantiis, quando nempe annulus suam crassitudinem aut marginem acutum ostendat, aut quando inclinare incipiat, quo, fit ut parva ejus latitudinis pars appareat. Tali in casu inaequalitates vel summitates annuli directe a sole accipiunt lumen fiuntque visibiles, quoad in solis radios transeat planeta, ut observaverat in vesperis post ultimam ansarum in longo diluculo reapparitionem. *Fig.* 32 annulum cum suis lucentibus punctis ostendit, sicut ea viderat MESSIERUS post reapparitionem, die 1 Julii 1774, tamdiu, quamdiu in solis radios transiret Saturnus.

---

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année MDCCLXXIV. pag. 49. DIONIS DE SÉJOUR, *Essai sur les phenom. rel. aux Disp. per. de l'anneau de Saturne*, pag. 412.

(2) *Nouveaux Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année MDCCLXXVI. pag. 326.

§. 5.

Annis 1789 et 1790, eo tempore, quo annuli planum per solem transibat, Schröter (1) de annuli crassitudine nihil conspicatus est, at vero quidem separata quaedam puncta, quae maximos existimabat montes, ratione crassitudinis annuli habita.

Mense Septembri anni 1789 in annuli reapparitione forma abruptorum punctorum conspicatus est annulum.

Die 31 Januarii anni 1790 orientalem annuli lineam Schröter (2) videbat omnino non tam latam claramque quam occidentalem, ut *Fig.* 33 eam ostendit.

Die Februario 10 sequente, 95 et 161 amplificatione 7 pedum Herscheliani telescopii ope, annulum conspicatus est ab unaquaque planetae parte fere aeque longum et aeque clarum, valde vero inaequalem, relinquensque ab unaquaque planetae parte spatium quod fere quartam ansaram partem contineret, ut in *Fig.* 34. Sic quoque diebus 13, 15 et 16 Februarii eum vidit, attamen duobus ultimis diebus, ansam orientalem paululum obtusiorem magisque abruptam occidentali.

Putat Schröter eadem se phaenomena, quod ad puncta in annulo lucida observasse, quae locum habent in nostra terra, quando oriitur vel occidit sol; quum adhuc aequora sint obscura, dum inaequali lumine illuminantur montes, ea ratione, qua alti sint, adscendat descendatve sol. Videbantur ipsi quoque hi montes, aeque ac apud nos, sole adscendente et descendente longas dare umbras, illasque umbras breviores fieri, ratione solis adscendentis habita.

Die Maji 12 anni 1803, videbat Schröter (3), quum sol australe annuli planum appropinquaret, ea ratione, qua sol inferius ad ejus horizontem perveniret, tali ratione etiam montium umbras longiores esse, inferioresque post eos planitiei partes obscuritate tegere. Et quia, ut addit, geocentricae longitudinis solis Saturnique differentia 3° 23′ complectebatur, oculusque parvo angulo oblique montium umbras intuebatur, illi apparere necesse erat annulumque continuo plus minusve punctatum abruptumque procedere; quod etiam fiebat, ipsique erat firmissimum montosarum inaequalitatum in annuli planitie argumentum

Ulterius adhuc Schröter procedit mediamque perpendicularem altitudinem unius horum montium definit esse 169,94 milliarium geographicorum (4).

---

(1) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 216.
(2) *Ibidem*, pag. 35.
(3) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 121.
(4) *Kronogr. Fragmente*, Th. I. pag. 225.

Auctore SCHRÖTERO (1) puncta lucida vel montes in australi facie observatos, illis in boreali respondent; quando ergo cum illo assumimus, punctum ab HARDINGIO observatum, vel altissimum Hardingianum montem (*höchste Hardingische Gebirge*) aeque alte supra borealem ac supra australem annuli planitiem eminere, tunc secundum *Kronogr. Fragm.* pag. 229 est, ejus diametrus $= 2 \times 303 + $ annuli crassitudo $= 606 + 113 = 719$ milliaria geographica, quae massa ergo illâ Cereris, Palladis, Junonis Vestaeque simul sumtarum major est, major plerisque Jovis Saturnique satellitibus, nostra lunâ, major etiam Mercurio.

Hunc ergo suarum observationum eventum indicat SCHRÖTERUS (2): annulum ex permultis vel innumeris montium massis constare, quae comparatione mediae annuli crassitudinis, multo majores minoresque, pleraeque tamen tales diametros habeant, qui medii fere mediae annuli crassitiei aequales sint; ideoque annuli lineam, quando vel apud vel et in annuli planum perveniat sol, semper separatis abruptisque punctis apparere, quae magnae massae vel annuli partes sunt, tum quia minores distinguere non valemus, et tum quia illae annuli particulae propter majores massas sole, tunc in horizonte sito, destituuntur umbraque teguntur.

Ille SCHRÖTERI eventus cum CASSINII hypothesi convenit, qui assumebat, annulum ex immenso satellitum numero constare, circa Saturnum se moventium; quorum vero intervalla non possent distingui (3). Illum tamen motum SCHRÖTER non statuit; sed de eo postea agemus.

Cum MESSIER tum BUFFON haec puncta esse montium cacumina statuebant. HERSCHEL vero non intelligebat, unde fieret, ut hos montes 200 millionum milliarium distantiâ videre possemus; existimabat, haec puncta forsan esse posse satellites, quorum orbitae in eodem atque illius annuli plano sitae essent.

Quidquid ergo sint, videntur corpora esse, quae non separatim ab annulo observari queant, sive sint annulo adaptata atque montes, sive ab annulo separata atque satellites sint.

§. 6.

Puncta illa lucida variis vicibus ab HERSCHELIO conspiciebantur, qui exinde, ut postea videbimus, annuli rotationem definiret.

---

(1) *Kronogr. Fragm.* Th. I. pag. 237.
(2) *Ibidem*. pag. 238.
(3) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année MDCCXV. pag. 47 et 48.

Mädler (1) *Anconae* in annuli disparitione mense Februario Martioque anni 1833, in quaque ansa in medio lucidum punctum vidit, sed in parte orientali melius, quam in occidentali.

Schwabe (2) *Dessaviae* conspicatus est 24 et 25 Junii 1833 in ansa orientali duo puncta luminis.

Videbantur quoque illa luminis puncta a Bianchio (3) *Cattajone* in mense Junio 1833; ut et a Santinio *Patavii*, die 18 Junii ejusdem anni; qui, ut fecerant Messierius et Herschelius, orientalem ansam cum filo comparabant, cui margaritae annexae esse videbantur.

Si in tota sua extensione non sint aequales annuli, sed tam crassitudine quam superficie inaequales, exinde sequi necesse est, annulo sicuti deinceps videbimus, rotationem esse, quae apparentem cum ea terminationem mutet; quae ergo etiam causa sit, quod hac in re observationes a se invicem differant.

§. 7.

DE INTERVALLO INTER PLANETAM ET ANNULUM.

Spatium inter superficiem Saturni et partem interioris annuli internam nonnulli putant vacuum spatium esse, per quod coelum stellatum videant.

Nemo autem adhuc perfectissimorum telescopiorum ope per illud spatium ullam stellam fixam vere nec dubie conspicatus est. Quamvis La Lande (4) et Smith (5) commemorarint; Whistonium narrare in Clarkei vita, hujus patrem per unum intervallorum annuli stellam vidisse. Mirum tamen est, postea de eo nil quemquam conspexisse, cum Saturnus posthac saepe in regionibus stellatis fuerit.

Quantum confidere possimus Faujas-Saint-Fondio, de eo judicare nolim; hic enim putabat, Guillielmo Herschelio praesente per horum spatiorum unum nonnullas stellas vidisse; dicit enim (6): »En dirigeant le même télescope sur »Saturne, nous vimes son anneau de la manière la plus distincte, ainsi que

---

(1) *Astr. Nachr.* B. XI. N°. 247. pag. 118.

(2) *Astron. Nachr.* B. XI. *Beilage zu* N°. 249. pag. 158.

(3) *Astr. Nachr.* N°. 252. pag. 197.

(4) La Lande, *Astronomie*, Tom. III. pag. 339.

(5) Smith, *volkomen samenstel der Optica of Gezigtkunde*, II. Deel pag. 680.

(6) Faujas-Saint-Fond, *Voyage en Angleterre, en Ecosse et aux Iles Hébrides*, Tom. I. pag. 86.

» l'ombre qu'il projetait sur le corps même de cette immense planète. M. WILLIAM HERSCHEL me fit observer, dans l'intervalle qui existe entre l'anneau mobile et la planète, le ciel et même quelques étoiles à travers cette espace."

Narrat HERSCHELIUS (1) per fissuram et intervallum inter planetam annulumque se non nisi apertum vidisse coelum ejusdem coloris ut coelum extra planetam atque annulum.

SCHRÖTER (2) saepius simul cum annulo stellas fixas in telescopii campo habuit; in obscuro autem intervallo, planetam inter et annulum nullas stellas fixas indagare potuit. Observat tamen hic simul, quamvis lumen colorumque nitor validis telescopiis augeatur, eadem relatione quoque luminis Saturni intensitatem accrescere. Stellae perparvae eo lumen suum amittunt, quando proxime Saturno veniunt, et magnis et parvis instrumentis, irradiationi maximam partem privantur propter magnum planetae lumen, atque tunc diametri sui causa nimis parvae sunt, quam ut inter planetam annulumque dignoscantur. Magnae duntaxat claraeque eo loco adhuc possent cognosci, sed talium occultationes multo sunt rariores. Ceteroquin obscurum intervallum SCHRÖTER putabat coeli aërem purum, quamvis ipsi obscurior videbatur reliquo spatio, extra planetam annulumque sito.

Nonnullis illa intervalla aliqua re, quae cum planetae annulique atmosphaera relationem habeat, repleta esse visa sunt.

Quod ad spatium attinet, quo annuli inter se invicem separantur, id nobis adhuc minus cognitum est. Ecce quod de eo SCHRÖTER dicit (3): » Jetzt aber, da » es mit mathematischer Gewissheit erwiesen ist, (quod nimis ex tripode dictum » videtur) dass der Ring sich überall nicht um die Saturnskugel beweget, sondern ein unverruckbares festes Kreisgewölbe ist, welches sich blos mit der Saturnskugel um die Sonne beweget, könnte es vielleicht zweifelhaft werden, ob » die dunkle durch die Dicke des Ringes gehende, und in beyden Flächen desselben sichtbare Kreislinie wirklich ein ätherischer oder atmosphärische Raum » zwischen zwey von einander abgesonderten Ringen oder ob es vielleicht eine » solide dunkle Schicht seyn möchte, welche die beyden hellen Schichten eines » und eben desselben Ringes verbände."

» Dieser mögliche zweifel dürfte wohl nie mit völliger Gewissheit entschieden

(1) *Phil. Transact.* 1792. Part. I. pag. 5.
(2) *Astron. Jahrb.* 1800. pag. 166 et 174, SCHRÖTER, *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 266.
(3) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 192 et 193.

» werden, da die Hoffnung zu entfernt ist, dass Saturn einen dafür hinlänglich » heller Fixstern bedecken, und bey dem Vorübergange hinter dem dunkeln » Zwischenraume die Sache entscheiden möchte. Nichts desto weniger halte ich » mir nach wie vor mit der dringendesten Wahrscheinlichkeit überzeuget, *dass » der Ring wirklich aus zwey durch einen Zwischenraum von einander abgeson- » derten Ringen bestehet*, weil diese Voraussetzung durch die Analogie des er- » wiesenermaassen *wirklich vorhandenen* ätherischen Zwischenraums zwischen » der Kugel und dem Ringe und dadurch unterstützet wird, dass wir in der » ganzen grossen Natur des Weltenalles bis jetzt überall keine solide dunkle » Schicht oder Flecken gefunden haben, welche nicht von atmosphärischer oder » ätherischer Beschaffenheit wäre."

§ 8.

DE ANNULI ATMOSPHAERA.

Quando per annuli planum sol transit, annulusque solum per radios solares versus tenuem suum marginem collustratur, et ibi, quantum fieri potest, pleno solis lumine fruitur, et tamen annuli linea telescopiorum communium ope videri non possit, vel nonnunquam partim eaque adhuc valde obtusa, quamvis umbra in planeta tam eximie sit perspicua et ut nigro-obscura appareat; illud atmosphaerae annuli Schröter (1) tribuit; quo fieret, ut nonnunquam solum ansarum unam aliquando tantum puncta lucida videre posset, quae nonnunquam quidem valde obtusa videbantur.

Quum per optima telescopia, ut per reflectorem Herschelianum 40 pedum, margine suo tenui a sole illuminato, tantummodo ut valde obtusus cinereo-griseus ac non nisi partim, atque nonnunquam omnino non conspici poterat annulus, quamquam perpendiculariter in eum radii solares caderent, illud nobis, judice Schrötero (2), persuadet, necesse esse ut atmosphaerâ instructus sit annulus, qui densitate proxime cum illa nostrae terrae conveniat

Repertas quoque vult Schröter (3) multas in annuli atmosphaera variationes modificationesque; quia modo una, modo altera ansa clarior est, annulusque totus nonnunquam minus perspicuus quam alio tempore apparet. Hancce suam opinio-

---

(1) *Kronogr. Fragm.* Th. I. pag. 249.
(2) *Kronogr. Fragm.* Th. I. pag. 253.
(3) *Ibidem*, pag. 257 seqq.

nem confirmat adhuc MARALDII (1) observatione, nonnullos nempe dies orientalem ansam latiorem clarioremque occidentali esse, et tamen primo disparere. Quod ipso judice MARALDIUS perperam rotationi tribuerat,

Ut Cap. V. pag. 156 vidimus, KATER quaestionem proposuit an atmosphaerae densitas forsan causa esse possit, quod minus clarus sit annulus exterior interiori, impediatque, quominus divisiones in eo saepe non possint observari.

Denique adhuc mentio facienda est de mechanica NICOLAI HARTZOEKERI explicatione (2); quam praebet, supponens annulum rotatorium habere motum, et quae sic se habet: » si l'on suppose à présent que l'anneau de Saturne fait sa revolu-
» tion avec une vîtesse proportionnée à celle avec laquelle ses satellites font leurs
» revolutions, et si le dessus de l'anneau, ou ce que nous avons appellé son coté
» mince, ou tranchant, étoit fermé d'une espèce de terre et d'eau; il est indu-
» bitable que l'eau y creuseroit dans le milieu, comme une espèce de fossé, et
» qu'ainsi ce coté tranchant nous dévroit paroître lumineux de deux côtez, avec
» une bande obscure dans le milieu, si nous avions des lunettes assez longues pour
» le découvrir."

CAPUT VIII.

QUIBUSNAM VIRIBUS ANNULUS CONSERVETUR.

§. 1.

Ut Cap. V. vidimus, satis certum est, annulum ex duobus, et si quidem seriores observationes confirmentur, ex tribus pluribusve concentricis annulis constare; quorum crassities, ceterarum dimensionum ratione habita parva est; quorumque autem volumen, ad minimum sumtum, illud terrae quinquies superat.

Quibusnam autem viribus magnae illae moles circa planetam, plus quam 4000 milliarium geographicorum distantia, inter se continentur? Hoc certo fieri

(1) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 260.
(2) *Essay de Dioptrique*, Paris MDCXCIV. pag. 188.

non potest solà ac simplici partium suarum cohaesione; tunc enim illae partes, quae planetam proximae sunt, perpetua gravitatis actione, sensim, ab annulis divellerentur seseque planetae jungerent, atque tali diminutione denique funditus delerentur annuli, quippe qui non satis virium in se habeant, quominus planetae obstent gravitati.

Cogitabant olim, sicut arcus vel pontis camera, illos sese ubique aequali distantia a Saturno continere; quum vero observationes docuerint, ex partibus eos esse compositos, quae non ubique eadem distantia a Saturno distent; in eo continua eorum exïstentia non est quaerenda.

§. 2.

Conservationem annuli Dionis de Séjour (1) vi adscribit centrifugae, qua omnes ejus sunt animatae partes, quae gravitati aequivalet, quae eum aliter ad planetae centrum praecipetaret; sine qua timeret, ne semper agens gravitatis vis, violentaque temporis manus, mox tam mirabile naturae opus destrueret. Ceterum, addit, annuli rotationis systema non est novum; ejusdem sententiae erant Maraldi, Cassini, Gregori atque de Maupertuis.

§. 3.

Quo mechanismo, sic rogat la Place (2), circa Saturnum, annuli suspensi manent? Si solummodo cohaesionis vi accideret, pedetentim variae eorum partes sese divellerent, tandemque in Saturnum deciderent, solverenturque in tot satellites; quumque id non sit factum, ex eo per se concludendum, eorum suspensionem praecipue liquidorum aequilibrio niti.

Duas, quae necessariae sunt, ut circa hunc planetam, Saturni annulus in aequilibro maneat, conditiones ponit la Place (3). Altera ad mutuarum ejus partium aequilibrium pertinet; altera ad liberam annuli circa Saturnum suspensionem.

Quod ad primam conditionem attinet, exigit aequilibrium, ut superficiei annuli particulae non conentur se ab eo distrahere; atque quando superficies haec liquida supponatur, se sustentare, variarum virium, quibus praeditus est, causâ.

---

(1) *Essai sur les phénom. rel. aux disp. period. de l'anneau de Saturne*, pag. 401.

(2) *Mécanique Céleste*, Tom. V. Liv. XIV. Chap. III. pag. 289. atque etiam *Expos. du syst. du Monde*, pag. 266.

(3) *Connaissance des temps pour l'an* 1811. pag. 450.

Sine eo aequilibrio, continuus harum particularum conatus tandem se divellerent, annulusque in nihilum redigeretur, ut omnia naturae opera, quae in se causam stabilitatis nullam habent, quae idonea est, ut harum contrariarum virium actioni obsistatur. Ut ex virium naturae ratione nobis cognitum est, cuique particulae adest infinitus conatuum numerus ad alias annuli partes atque ad planetam. Nunc autem LA PLACE probavit, in duobus operibus, *Theorie de l'anneau de Saturne* (1), atque *Mécanique Céleste*, Liv. III, illam mutuam particularum attractionem adhuc conjungendam esse, cum celeri rotationis annuli motu in suo plano circumque ejus centrum, quod necesse est, ut semper parum a Saturni centro distet. Hac conditione perfecta, annulus quidam liquidus se circa Saturnum in aequilibrio tenere potest; praeterea adhuc ostendit, annuli sectionem vel figuram generatricem (2), quae perpendiculariter in plano annuli et per ejus centrum transit, complanatam ellipsin esse, cujus axis major ad Saturni centrum directus est.

Quod ad secundum liberae annuli circa Saturnum suspensionis conditionem attinet; sphaera concava, cujus internae et externae superficies uniformes concentricaeque sunt, in aequilibrio circa Saturnum manebit, quicunque tandem locus in ejus sphaerae interiore parte per planetae centrum occupetur; illud autem aequilibrium indifferens esset, scilicet, perturbatum non conaretur primitivum recuperare statum, neque a puncto, quod ultimo occupaverat, recedere; minima causa, ut satellitis vel cometae actio tunc sufficeret, ut sphaera in planetam dilaberetur. Indifferens aequilibrium, quod in concava sphaera, quae Saturnum cingit, locum habet, non existit in zona circuliformi, quae hunc planetam cingit. LA PLACE, in *Mécanique Céleste*, probavit, quodsi duo circuliformis annuli planetaeque centra non coïncidunt, se invicem tunc repellere, describetque ergo annuli centrum lineam curvam, convexam planetae centrum versus, ita ut annulus tandem necessario planetae superficiem attingeret, cumque eo se conjungeret. Idem quoque locum haberet, quaecunque tandem annuli constitutio esset, si sine rotationis esset motu; cum autem consideratur, non in omnibus suis partibus uniformem esse annulum, ita ut gravitatis centrum non cum eo figurae coïncidat; praetereaque supponitur, celere rotationis motu eum esse praeditum in plano suo, tunc ejus centrum gravitatis ipsum circa Saturni cen-

(1) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année 1787.

(2) Figura generatrix existit, quando planum per planetae centrum et perpendiculariter per annuli planum ducimus.

trum rotabitur atque ad id punctum gravitabit, velut satelles; eo tamen discrimine, ut illud in planetae interna parte movere se poterit; erit ergo ei stabilis motus conditio.

Itaque in his duabus conditionibus requiritur, ut annulus in plano suo rotetur, idque quidem magna celeritate

§. 4.

Porro quoque LA PLACE ostendit (1), duobus Saturni annulis, variis distantiis a planeta positis, per solis actionem varios praecessionis motus esse debere, qui, nisi aliae vires se opponerent, perpetuo mutuum planorum suorum situm mutarent; illa plana non sensibiliter coïnciderent, quam per brevia temporis intervalla. Hic LA PLACE animadvertit, contra omnem esse verosimilitudinem, annulos in tali intervallo repertos fuisse; verosimillimum autem, causam adesse, quae hos annulos fere in unum idemque retineat planum, quamquam solis actio continuo eos hinc removere conetur. LA PLACE in gravitatis theoriae eventu, in sua *Theorie de l'anneau de Saturne* (2) nos docuit, illam causam esse Saturni sphaeroidis complanationem, quae originem habet, in hujus planetae circa axem suum celeri rotationis motu; qui motus ab HERSCHELIO confirmatus est. Ostendit analysis, quod, si supponamus, annulos parum ad Saturni aequatoris planum inclinare, planetae complanatio eos semper fere in illud planum retineat, a quo solis actio eos conatur removere. Eodem tempore, quo hi annuli circa centra sua gravitatis rotantur, illa centra se circum planetae centrum movent. Hinc in ipsis planorum annulorum sitibus mutuis, perpetuae oriuntur variationes, quae in modo, quo a sole circa suas apparitiones disparitionesque illuminentur, atque in eo, quo se observatori ostendunt, discrimina proferunt, idoneae, ex quibus mirabilia phaenomena explicentur, quae nonnunquam in iis observata sint, tali modo, ut contingit in unius ansarum disparitione ante alteram, quae pergit, in apparendo in eadem planetae parte, per unam, omninoque varias rotationis annuli periodos. Ejusmodi quoque sunt puncta lucida, quae immobilia videntur, quaeque nonnullos observatores eo duxerunt, ut de annulorum rotatione dubitarent.

---

(1) *Mécanique Céleste*, Tom. V. Liv. XIV. Chap. III. pag. 290.
(2) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année 1787.

§. 5.

Annuli rotationem circa axem suum primo loco ponentes; licet statuamus annulum ex materie parum cohaerente constare, liquido verbi causa; talis tamen liquidi aequilibrium adhuc consistere perget, inquit LA PLACE (1), quamquam ellipsin supponamus generatricem, variabilem magnitudine et situ, circuitûsque annuli extensione; modo sint hae variationes non sensibiles, nisi distantiis multo majoribus, quam axis sectionis generatricis. Sic poni annulus potest irregulare corpus esse, cujus variae partes inaequalem habeant latitudinem crassitudinemque; omnino quidem ponere possumus duplicem esse annulo curvaturam. Illae in annulo inaequalitates revera etiam, ut ostendimus, observationibus monstrantur. Imo exiguntur necessario, ut in aequilibrio circum planetam annulus teneatur; si enim in omnibus suis partibus perfecte uniformis foret, minima vi ejus aequilibrium perturbaretur, imo quidem satellitis alicujus attractio sufficeret, ut perturbaretur aequilibrium, tandemque in planetam dilaberetur annulus.

Omni ergo jure ponimus, annulos, quibus cingatur Saturnus, solidis et irregularibus constare corporibus, inaequalis latitudinis crassitudinisque in variis circuitus sui punctis; ita ut eorum centra gravitatis non coïncidant cum eorum centris figurae. Possunt illa centra gravitatis considerari ut totidem satellites, qui se moveant circa Saturni centrum in distantiis, quae dependeant ab annulorum inaequalitatibus, atque cum angularibus celeritatibus, quae aequales sunt rotationis celeritatibus annulorum suorum mutuorum.

Necesse est, ut et mutuis suis attractionibus et ipsius Solis, nec minus a septem satellitibus perturbati, hi annuli frequentes circa Saturni centrum, oscillationes faciant, atque ita lucis phaenomena producant, quorum periodus permultis annis absolvatur. Cogitare possemus hos annulos, tot tamque variis viribus subjectos, desinere debere se in eodem movere plano; quum autem celer rotationis motus Saturno sit, planumque aequatoris ejus cum eo priorum sex satellitum, ipsiusque annuli plano coïncidat, ideo Saturni actio corpora illa fere in suis continet planis. Solis septimique satellitis actio inclinationem duntaxat plani aequatoris Saturni mutat, qui in suo ita mutato motu annulos, ut et sex priorum satellitum orbitas secum trahit.

(1) *Exposition du système du Monde*, pag. 267.

§. 6.

Unam primarum annuli conservationis conditionum etiam Johannes Herschel (1) annuli in suo plano rotationem esse putat. Quod autem ad aequilibrii stabilitatem attinet, adhuc valde necessariam annulorum cum planetae centro excentricitatem censet, sicut illa quoque a Schwabeo, Hardingio, Struveo et ab eo ipso observata est (2). Hac excentricitate gravitatis centrum circum illud planetae oscillat, qua perparva orbita describitur, quae fortasse valde est complicata. Si annuli essent accurate circuliformes concentricique cum planeta, tamen, licet illa centrifuga vis adesset, systema componerent, in statu *aequilibrii instabilis*, quod minima externa causa perturbari posset; non quod eo fractura in annulo oriretur, sed annuli tota sua massa, sine eo ut frangerentur, in planetam detruderentur. Quia talis annuli vel annulorum attractio in punctum vel sphaeram, qui excentricum in iis situs est, in omnibus directionibus non est eadem, sed punctum vel sphaeram ad proximum annuli punctum attrahere vel a centro removere conatur. Si enim ponimus corpus unâ alterâve causa, quam minime quoque, ex illo centro extrahi, tunc gravitas ipsa non valet illam concentricitatem restituere, contra adaugeret excentricitatem, donec corpus et annulus se invicem attingerent. Saturni satellitum attractiones, ut totidem causas possumus considerare externas, quae valeant excentricitatem efficere, et ut systema *stabile* futurum sit, atque in se vim possideat, contrario conatu huic conatui obsistere posse, satis sit statuere, illud alicubi in circuitus puncto *oneratum* esse, sive inaequalitate crassitiei sive densitatis, quae ceterum tantummodo parva sit. Tale onus toto annulo cui annexum est, certum characterem ponderosi tardique satellitis praebet, qui praeponderatione sua parvis perturbationis causis repugnare potest, et si revera perturbationes obtinuerint, restituere. Quamvis autem talis oneris praesentiam non ponamus, quum eam nullo argumento probare possimus, universalemque instabilitatem in tota sua extensione assumamus, in omnium perturbantium causarum periodica natura satis certa censenda est annulorum conservatio. Ut hanc aequilibrii conservationem in luce ponat Herschelius, eam cum exercitata manu comparat, quae in summo digite baculum longiusculum in aequilibrio tenere conatur, ita, ut cum fulcro continuum fereque invisibilem motum communicet. Quomodocunque sit, inquit Herschel, observata annulorum centri oscil-

(1) Herschel, *Treatise on Astronomy*, pag. 284.
(2) Vid. Cap. V. §. 12.

latio circa illud planetae, per se, est documentum perpetui certaminis perturbantes inter conservantesque vires, quamquam utraque eximie est debilis, tamen se invicem ita continuo frenant, ut universalis distructio praecaveatur.

Hic quoque HERSCHEL animadvertit, minimum celeritatis discrimen inter planetam et annulos in orbita sua circa solem, annulos sine dubio in planetam detruderent, adeo ut separari nunquam possent, nam quum semel se invicem attigerint, in statu *aequilibrii stabilis* erunt, seque invicem immensa vi continebunt. Inde sequitur externâ potentiâ motum eorum circa solem maxima diligentia determinatum fuisse, aut annulos circum planetam esse creatos, quando eorum mutuus motus orbicularis jam ita erat definitus, atque in plena liberaque omnium agentium virium efficacitate.

§. 7.

Excepta rotatione GUILLIELMUS HERSCHEL adhuc conditionem statuit, quae annulo conservando inservit, ejus nempe divisionem in duos annulos Quoniam parva crassitie, respectu insignis latitudinis annuli, illae partes, quarum distantiae a planetae centro, secundum tertiam KEPLERI legem, multo celeriorem motum partibus magis dissitis habeant, annuli partibus non satîs esse poterat soliditatis, ut inter se conjunctae manerent. Nunc autem in divisa eorum conditione, variis partibus erit rotatio cum formatione et centrifuga vi conveniens, ita ut eo modo prospectum sît universi annuli conservationi; quamvis illud non indubitabile argumentum quod ad divisionem variasque rotationis periodos haberi velit, quod observationibus solum dijudicari poterit (1).

---

(1) *Phil. Transact.* MDCCXCII. Part. I. pag. 7. *Astron. Jahrb.* 1796. pag. 91.



CAPUT IX.

DE ANNULI ROTATIONE.

§. 1.

Capite praecedente vidimus unam ex praecipuis conditionibus ad Saturni annulorum conservationem esse, quod celerem aliquem circa axem motum rotatorium habeant; ceterae conservationis conditiones perfecte cum observationibus conveniebant. An quidem rotatio revera locum habet?

Putat CASSINI (1) se ponere posse annulum constare ex satellitum accumulatione, qui in ceterorum satellitum plano siti sunt, atque convenienter KEPLERI legibus revolutionem circa planetam perficiunt.

DIONIS DE SÉJOUR (2) valde modeste dicit, se, si sibi liceret, aliquas facere conjecturas, suspicari omnes annuli partes esse animatas vi centrifuga, idonea ut in aequilibrio manerent, sine qua, timendum esset, ne semper agens gravitatis vis, mox tam singulare naturae opus deleret. Quae sententia, inquit, non est nova, quoniam de ea jam mentionem faciebant MARALDI, CASSINI, GREGORI et DE MAUPERTUIS.

Inde LA LANDE (3) annulo rotationem esse concludit, quoniam ansa orientalis die Octobris 9 anni 1714 latior apparebat occidentali, et tamen die 12 Octobris prima disparebat (4); quod, ut dicit, annuli rotationem significare videtur, quâ fit, ut illa, quae maxime ad oculum vergit pars, a dextra ad sinistram transeat partem.

BODE (5) eo firmat hypothesin, annulum nempe rotari, ut statuat vel

---

(1) *Mém de l'Acad. des Sciences*, année MDCCXV. pag. 47.
(2) *Essai sur les phénom. rel. aux disp. périod. de l'anneau de Saturne*, pag. IV et 401.
(3) *Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences*, année MDCCLXXIII.
(4) *Ibidem*, année MDCCXV. pag. 12.
(5) *Astron. Jahrb.* 1786. pag. 141.

putet, olim ad planetam ipsum pertinuisse annulum atque per vim centrifugam, in aequatore ab illo esse divulsum, ei deinceps eandem celeritatem propriam mansisse.

Annuli rotationem non cum ea planetarum satellitumve debemus confundere, sed cum planetarum revolutionibus circa solem, vel satellitum circa planetas primarios comparare.

§. 2.

La Place (1) rotationis annuli periodum definit ex vi centrifuga, quae ex rotatione profluit, quamque invenit aequalem esse $\frac{S}{a^3}$, cum sit S Saturni massa atque a distantia centri sectionis generatricis ad Saturni centrum; porro ponens rotationis motum, similem revolutioni alicujus satellitis, siti in distantia a a Saturni centro, quod ad eventum periodi rotationis accipit: eam fere aequalem esse $0^d,44$ vel $10^h\ 33'\ 36''$, quod attinet ad interiorem annulum.

§. 3.

Singularem aliquam methodum in periodo annuli definienda sequebatur Kantius (2). Ponebat, ut jam vidimus, ab origine annulum esse formatum, adscendentibus ex Saturno vaporibus, quae particulae suos servaverant motus, quos habebant, cum adhuc cum planeta essent conjunctae, propter Saturni circa suum axem rotationem. Necesse erat, ut hae celeritates diminuerentur, quoad illae particulae ab utraque aequatoris Saturni parte propius polos adscenderant; ut hae partes, quae aliqua distantia ab aequatore adscendissent, solae celeritatis haberent satis, ut resistere vi gravitatis Saturni possent; dum ceterae partes necessario in planetam iterum reciderint, quoniam magis valebat gravitas. Itaque secundum Kantii opinionem absoluta particularum annuli celeritas aeque magna esse debet, atque illae particulae, quae adhuc sunt in planetae aequatore. Ut ergo rotationis annuli periodum definiat, primo eam planetae definit, eam comparando cum satellitis celeritate, ponens earum celeritates ad se invicem se habere inversa proportione, ut radices quadratae distantiarum ad planetae centrum. Ex qua celeritate computat Saturni rotationem, quam invenerit $6^h\ 23'\ 53''$. Ex hac rotationis periodo definit vis centrifugae aequatoris proportio-

(1) *Mécanique céleste*, Tom. II. Liv. III. pag. 163.
(2) Gensichen, *Auszug aus Kants Naturgeschichte und Theorie des Himmels.*

nem ad gravitatem in Saturni superficie atque invenit 20 : 32 vel 5 : 8. Definit porro periodum, quo particulae et exterioris et interioris annuli marginis suam revolutionem circa Saturnum perficiant, atque quod ad rotationis periodum marginis interioris accipit fere 10 horas et quod ad illum exterioris marginis fere 15 horas

GENSICHEN narrat se non potuisse perfectos nancisci KANTII eventus; ut eos computaret, ponebat: celeritatem unius Saturni satellitum $= C$, rotationis ejus periodum $= T$, orbitae radium $= R$; interioris marginis annuli celeritatem atque adeo etiam eam Saturni aequatoris $= c$, interioris marginis semidiametrum $= r$, aequatoris Saturni radium $= \rho$ illiusque rotationis periodum $= \tau$; ponitque tunc secundum KANTIUM

$$\sqrt{r} : \sqrt{R} = C : c \text{ (1)}$$

unde sequitur

$$c = C\sqrt{\frac{R}{r}}$$

deinde ponit

---

(1) Quae proportio hoc modo inveniri potest: ponendo secundum legem mechanicam, rotationis celeritates se ad se invicem habere recta ratione distantiarum ad centrum motus et inversa ratione ad periodos rotationis; ergo

$$C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$$

unde sequitur

$$T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$$

secundum tertiam KEPLERI legem habemus

$$R^3 : r^3 = T^2 : t^2$$

atqui ergo

$$R^3 : r^3 = \frac{R^2}{C^2} : \frac{r^2}{c^2}$$

et

$$R^3 : r^3 = c^2R^2 : C^2r^2$$
$$C^2R^3r^2 = c^2R^2r^3$$
$$C^2R = c^2r$$
$$C\sqrt{R} = c\sqrt{r}$$
$$\sqrt{r} : \sqrt{R} = C : c$$

$$T : \tau = cR : C\rho \ (1)$$

in ea praecedentem valorem c substituens, nanciscitur

$$T : \tau = CR\sqrt{\frac{R}{r}} : C\rho$$

vel

$$T : \tau = R\sqrt{\frac{R}{r}} : \rho$$

atqui ergo

$$\tau = \frac{T\rho\sqrt{r}}{R\sqrt{R}}$$

ut ergo hunc valorem τ computet, assumit: $T = 1^d\,21^h\,18'\,31'' = 163111''$, $\rho = 5$, $r = 8$ et $R = 21{,}6$; atque invenit, quod ad rotationis Saturni periodum vel

$$\tau = 23022'' = 6^h.\,23'\,42''.$$

Sequentem ponit proportionem, ad inveniendam rotationis interioris marginis periodum:

$$\rho : r = \tau : t$$

significans t rotationis periodum cujusdam particulae interioris marginis, et pro ρ, r et t eorum valores, ut supra, ponendo, habemus

$$5 : 8 = 23022'' : t$$

unde quod ad rotationis periodum accipit

$$t = 10^h\,14'\,12''$$

et in proportione

$$T : \tau = R\sqrt{\frac{R}{r}} : \rho$$

loco τ et ρ ponentes t et r, ut

$$T : t = R\sqrt{\frac{R}{r}} : r$$

accipit

$$t = 9^h\,36'\,17''.$$

---

(2) Secundum suppositionem in praecedenti nota, possumus ponere

$$C : c = \frac{R}{T} : \frac{\rho}{\tau}$$

unde sequitur

$$T : \tau = cR : C\rho.$$

Atque diametrorum interioris et exterioris marginum rationem = 8 : 11 ponens, nanciscitur, quod ad revolutionis periodum ratione habita unius exterioris marginis particulae fere 16 horas.

Hi autem eventus accipi non possunt, quippe qui hypothesi fundati sunt, quam nobis assumere non licet; eo minus, quoniam eos firmiter definire possumus.

§. 4.

Reducit Wildtius (1) proportionem Kantianam

$$C : c = \sqrt{r} : \sqrt{R}$$

ponendo

$$C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$$

ad

$$\frac{R}{T} : \frac{r}{t} = \sqrt{r} : \sqrt{R}$$

reducendo; vel

$$R : r = T\sqrt{r} : t\sqrt{R}$$
$$R\sqrt{Rr} : r\sqrt{Rr} = T\sqrt{r} : t\sqrt{R}$$
$$R\sqrt{R} : r\sqrt{r} = T : t$$

atque sic ad

$$t = \frac{Tr\sqrt{r}}{R\sqrt{R}}.$$

Quae tertia Kepleri lex est. Quod ad hanc formulam Saturni quarti satellitis mediam distantiam atque tempus revolutionis assumit. Ponens mediam distantiam quarti satellitis ad Saturni centrum, secundum Herschelii observationes (*Phil. Transact.* 1790. pag. 488.) = 3′ 8″,918 atque annuli dimensiones ecund um Herschel (2) scilicet:

Exterior	externi	annuli	diametrus	=	8300
Interior	»	»	»	=	7740
Exterior	interni	»	»	=	7510
Interior	»	»	»	=	5900

eas reductas praebebant

(1) Wildtii, *de Rotatione annuli Saturni*, *Commentatio*, Pars I.
(2) Vid. Cap. V. §. 7.

Exterior	externi	annuli	diametrus	=	46″,677
Interior	»	»	»	=	43 ,528
Exterior	interni	»	»	=	42 .234
Interior	»	»	»	=	33 ,180

quod Saturni ad solem mediam distantiam attinet, sumebat Saturni diametrum = 20″,605, radiumque Saturni = 1 ponens, nanciscebatur R = 18,337 et quod ad interioris marginis annuli radium $r = 1{,}539$; ponens revolutionis quarti satellitis tempus secundum Herschelium sive $T = 15^d\ 22^h\ 41'\ 13'',4$. Hisce datis nanciscebatur quod ad rotationis periodum vel $t = 9^h\ 18'\ 17''$.

Et ponendo

$$R = 18{,}67$$
$$T = 15^d\ 22^h\ 34'\ 38''$$
$$r = 1{,}67$$

(quod opinatur potuisse Kantium ponere), quod ad rotationis periodum invenit

$$t = 10^h\ 14'\ 5''.$$

§. 5.

Ut rotationis variorum punctorum annulorum tempus computemus, adhibebimus, determinationes micrometricas dimensionum Struvei (1), quae sunt sequentia:

Externus	exterioris	annuli	radius	=	20″,0475
Internus	»	»	»	=	17 ,6445
Externus	interioris	»	»	=	17 ,2375
Internus	»	»	»	=	13 ,3340
Radius Saturni aequatorialis				=	8 ,9955.

Aequatorialem Saturni radium = 1 ponendo, accipimus, quod ad has dimensiones:

Externum	exterioris	annuli	radium	=	2,2286
Internum	»	»	»	=	1,9615
Externum	interioris	»	»	=	1,9162
Internum	»	»	»	=	1,4823.

Secundum Johannes Herschel (2) media primi satellitis ad Saturni centrum distantia (ponendo radium Saturni aequatorialem = 1), est = 3,351.

---

(1) Vid. Cap. V. §. 8.

(1) *Treatise on Astronomy*, pag. 418.

Ejusdemque revolutio siderea $= 0^d\,22^h\,38' = 0^d,943$.

Per T et t tempora rotationis annuli revolutionisque unius satellitum proponendo, et per R et r eorum medias ad Saturni centrum distantias. Tunc tertia KEPLERI lex praebet

$$T = t\sqrt{\frac{R^3}{r^3}},$$

habemusque quod ad ulteriorem exterioris annuli punctum,

$$R = 2{,}2286,$$
$$r = 3{,}351,$$
$$t = 0{,}943,$$

$$\begin{array}{rll} Log.\ R & = 0.3480321 & \\ & \overline{}\,3 & \\ Log.\ R^3 & = 1.0440963 & \\ Log.\ r^3 & = 1.5755232 & \\ \hline & \ 9.4685731 & \\ 2) & \overline{\ 9.7342865} & \\ Log.\ t & = 9.9745117 & \\ \hline Log.\ T & = 9.7087982 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} Log.\ r & = 0.5251744 \\ & \overline{}\,3 \\ Log.\ r^3 & = 1.5755232 \end{array}$$

$$T = 0^d,51144 = 12^h\,16'\,28'',4.$$

Quod ad punctum in interno exterioris annuli margine, est

$$R = 1{,}9615;$$

ceterae quantitates eaedem manent, nobisque est

$$\begin{array}{rl} Log.\ R & = 0.2925883 \\ & \overline{}\,3 \\ Log.\ R^3 & = 0.8777649 \\ Log.\ r^3 & = 1.5755232 \\ \hline & \ 9.3022417 \\ 2) & \overline{\ 9.6511208} \\ Log.\ t & = 9.9745117 \\ \hline Log.\ T & = 9.6256325 \end{array}$$

$$T = 0^d,42231 = 10^h\,8'\,7'',6.$$

Quod ad punctum in externo interioris annuli margine est,

$$R = 1{,}9162\,;$$

nobisque est

$$\begin{aligned} Log.\ R &= 0.2824408 \quad 3 \\ Log.\ R^3 &= 0.8473224 \\ Log.\ r^3 &= 1.5755232 \\ &\quad 9.2717992 \\ 2)&\quad 9.6358996 \\ Log.\ t &= 9.9745117 \\ Log.\ T &= 9.6104113 \end{aligned}$$

$$T = 0^d{,}40777 = 9^h\,47'\,11'',3.$$

Quod ad punctum in interno interioris annuli margine est

$$R = 1{,}4823$$

$$\begin{aligned} Log.\ R &= 0.1709361 \quad 3 \\ Log.\ R^3 &= 0.5128083 \\ Log.\ r^3 &= 1.5755232 \\ &\quad 8.9372851 \\ 2)&\quad 9.4686425 \\ Log.\ t &= 9.9745117 \\ Log.\ T &= 9.4431542 \end{aligned}$$

$$T = 0^d{,}27743 = 7^h\,39'\,30'',0$$

Habemus ergo comparatione cum primo satellite, quod ad periodum rotationis,

quod ad	externum	exterioris	annuli	marginem	.....	$12^h\,16'\,28'',4$
» »	internum	»	»	»	.....	10 8 7 ,6
» «	externum	interioris	»	»	.....	9 47 11 ,3
» »	internum	»	»	»	.....	7 39 30 ,0.

Quando in annulo punctum sumimus, cujus distantia ad centrum Saturni aequalis sit, aequatoriali Saturno radio duplicato, tunc accipimus, quod ad rotationis periodum

$$0^d{,}43476 = 10^h\,26'\,3'',3$$

quae cum eventu LA PLACII convenit.

§. 6.

Nunc primo videamus, quid observationes hac de re nos doceant.

Pluribus, unius ex maxime claris optimeque observatis punctis, observationibus inter se comparandis, (quae observationes instituebantur, quum annulus anno 1789 in eo esset loco, ut dispareret, seque tantum ut subtile luminis filum ostenderet,) videbat HERSCHEL (1) hoc punctum, tempore $10^h\,32'\,15'',4$ circa Saturni centrum moveri: atque ex illa periodo ejus ad Saturni centrum distantiam secundum tertiam KEPLERI legem computans, nanciscebatur ut eventum $17'',227$; quae distantia in annulum cadit; unde concludebat, annulum esse, qui hunc rotatorium motum perficeret, neque posse octavum esse satellitem; nisi annulum satis fluidum ponamus, qui sineret satellitem aliquem in hoc fluido circumvolvi, vel ut fissuram, sulcum vel divisionem in annulo supponamus, per quam ille posset satelles transire.

Neutrum horum, secundum HERSCHELIUM locum habere poterat.

Fluidum aliquod annulum esse censere omnino non potuit; contra, suae eum observationes docebant, ejus consistentiam non minorem quam ipsius planetae corporis esse posse; ita ut nullum fluidi gradum cogitare posset, qui corpus quod circumvolvitur in tempus valde diuturnum mobile facere posset.

Fortasse transitum tali satelliti sulcus praebere posset, eoque magis, quum talis aliquis existat, qui in duas partes dividat annulum; quodque huic sententiae adhuc magis favere videbatur, illud erat, quod in nonnullis observationibus, ab utraque annuli parte, punctum clarum projectum videretur, eodem modo, quo saepe in satellitibus observamus, quando pone annulum transeunt. Cogitandum autem est et ab altera parte, clarum illud punctum saepe proxime ansarum annuli extremitatem observari, computatamque distantiam quod ad talia phaenomena nimis parvam esse, quae ad minimum $19''$ vel $20''$ esse deberet. Quod HERSCHEL putat puncti situi adscribendum esse, qui mutabilis esse videtur; certe alioquin vix intelligi posset, quomodo satellitum aliquis, clarior sexto, et saepe visibilis, etiam lunâ fere plenâ, tam saepe ejus visum effugeret, in ejus frequentibus revolutionibus, nisi ille in ejus apparente claritate multum mutaret.

---

(1) *Phil. Transact.*, Vol. LXXX. 1790. Part. I. pag. 479.

Huic adhuc aliud argumentum jungit, sumendo numerum aliquot punctorum clarorum, quae non omnia cum unius alicujus satellitis motu convenire possent, nisi ponatur ea annulo adhaerere, atque ita eandem annuli revolutionem periodicam participare.

Hunc in finem ponit quinque lucida puncta in annulo, quae sita sunt ut in *Fig.* 35, statuens circumferentiam annuli divisam esse in 360°, situmque esse punctum α in 271°,5; β in 70°,2; γ in 183°,0; δ in 142°,5 atque ε in 358°,6. Hic ita maculis distinctus annulus ei inservit pro epocha in annum 1789; computatque deinceps tabulam, quod ad harum macularum motum in menses, dies, horas et minutas, periodum annuli revolutionis $10^h\,32'\,15''{,}4$ ut fundamentum ponens. Quorum auxilio omni tempore situm macularum in annulo computare potest, atque deinde eas observationibus probare, quo etiam sibi persuadere potest, positiones, quas hae computationes praebeant, non posse convenire cum iis ullius septem satellitum, ita ut nunquam falli posset, habendo horum satellitum unum, tanquam maculam.

A die 28 Julii 1789 usque ad Decembris diem 25 proximum, 49 observationes faciebat, quarum 20 solum in clarissima fiebant macula, omnesque eximie cum computato situ conveniebant confirmabantque ita annuli ab occidente ad orientem rotationem in periodo $10^h\,32'\,15''{,}4$, circa axem, qui perpendiculariter in annuli plano erectus est.

An ambo annuli aequalem rotationis periodum habeant, vel utri observata conveniat, Herschelius non certo ausus fuit decernere. Duae observatae maculae, quae ei inservierant ad definiendam rotationem, secundum ejus conjecturam ad exteriorem pertinebant annulum; duaeque aliae maculae ipsi videbantur ad interiorem annulum pertinere, quarum rotationis motum conjiciebat, parum ab eo exterioris annuli differre (1).

Quando hanc rotationis periodum $10^h\,32'\,15''{,}4$ cum revolutionis periodo atque primi satellitis a Saturno distantiâ comparamus (Vid. §. 5.), tunc, secundum legem Kepleri tertiam, nanciscimur, quod ad distantiam a puncto ad Saturni centrum $18''{,}1192$, ita ut fere in annuli exterioris medium hoc punctum cadat.

Secundum Johannes Herschel (2) haec periodus rotationis $10^h\,29'\,17''$ contineret.

---

(1) *Phil. Transact.* 1792. Part. I. pag. 7. *Astron. Jahrb.* 1796. pag. 91.

(2) Herschel, *Treatise on Astronomy*, Chap. VIII. pag. 284.

§. 7.

Quamvis fieri non posset, ut haec ingens moles sine vi centrifuga in aequilibrio maneret, et quamvis adessent observationes HERSCHELII, quae tot contineant firma argumenta, observabat SCHRÖTERUS seriem phaenomenorum, quae annuli rotationi omnino contradicere videantur, illumque hinc etiam ad inconcussam conclusionem ducerent, annulum situm suum non omnino mutare, propterea que non rotari, vel positionem suam tam tarde mutare, ut demum, quum Saturnus totus circa solem revolverat, et ipsum rotationem perficere, aeque ac luna terrae ratione habita.

Ejusdem multiplices observationes, quas nonnunquam simul cum aliis instituebat, omnem attentionem merentur, quare earum quam brevissime mentionem faciemus:

Anno 1790 postquam iterum apparuit annulus, quoniam terra transibat illuminatum australe annuli planum, per aliquot noctes, mensibus Januario atque Februario, omni diligentia ab SCHRÖTERO, TISCHBEINIO et LUEDENIO observabatur annulus.

In observando plurimum SCHRÖTER utebatur reflectore 13 pedum 136, 180 et 280 amplificationibus, et reflectore 7 pedum HERSCHELII 74, 120, 200 et 500 amplificationibus; deinceps utebatur 7 pedum telescopio SCHRADERI 80, 90, 120 et 180 amplificationibus et 10 pedum tubo parallactico Dollondiano 74, 126 et 500 amplificationibus.

Die Februarii 16 SCHRÖTERUS, TISCHBEINIUSque in orientali annuli linea observabant eximie clarum punctum, fere ut in *a Fig.* 36 (1). Hoc clarum luminis punctum diebus 19, 20 et 22 Februarii mensis, semper adhuc eodem loco ab iis conspiciebatur, quo SCHRÖTER ad opinionem ducebatur, nullam in annulo locum habere rotationem; eo magis in hac sententia confirmabatur, quoniam orientalis annuli linea semper debilior occidentali videbatur; quod locum habere non poterat, quoniam rotationis HERSCHELII periodus non absolvitur 24 horis (2), quod tamen adhuc probare posset, si rotationis periodus accideret, in 12, 8, 6, 4, 3, 2 vel 1 horis, quia hi numeri 24 absolvuntur; et quando singulis vesperis eâdem hora observabant, poterant fortasse in eadem positione annulum conspicere; atque quoniam quotidianae eorum observationes ultra semihoram durabant, minores periodi, 6, 4, 3, 2 et 1 horarum excidere debebant, quia

(1) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 42.
(2) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 48.

progressus puncti *a* iis erat observandus. Atqui si rotatio locum haberet, ea necesse erat, secundum suam opinionem, ut fieret intra 24 vel 12 horas, si intra 8 horas obtineret, propter translocationem puncti *a* rotationem observare debuisset; quoniam per semihoram sedecimam circuli rotationis partem necesse percurreret, quae mutatio ipsum non poterat fugere, essetque periodus 10 horarum, quippe quae non in 24 absolveretur, tunc hoc punctum quaque vespera loco multum mutatum esse debuisset.

Opinatur quoque Schröter quae in annis 1714, 1743 et 1773 fiebant observationes, illis suam thesin confirmari, quandoquidem tunc temporibus plerisque inveniebatur occidentalem annuli lineam orientali longiorem esse (1).

§ 8.

Anno 1803, iterum situm assumens planum annuli, terrae ratione habita, qui talibus observationibus idoneus erat unaquaque Schröterus fungebatur occasione, ut observationum seriem persequeretur.

Hardingius (2) diebus 4 et 12 Januarii 136 amplificatione 13 pedum reflectore, in australi annuli facie, rursus illud lucidum luminis punctum immutabile in occidentali annuli linea esse. Confirmabantur quoque hae observationes a Schrötero Ludenioque, annulo se ostendente ut in *Fig*. 37. cum magno lucido luminis puncto *a* in occidentali annuli linea; iidem videbant adhuc duo talia puncta ut *b* et *c* in orientali annuli linea. Unde Schröter denuo censebat, annulum forte firmae fornicis instar esse et haud rotari; quoniam illud lucidum punctum tres horas continuas sine visibili aliqua mutatione semper uno eodemque manebat loco, et quia etiam orientalis annuli linea, aeque ac anno 1790, sine ulla mutatione semper obtusiore debilioreque lumine apparebat, ita ut, se judice, rotationis periodus Herscheliana locum habere non posset, quippe necesse esset, eo monente, ut Hardingii *nodus* tribus horis quartam circuli rotationis partem percurreret, ideoque nunc decernebatur annulum adhuc magis diversis horis observare.

Constituebatur ad annulum rite observandum, nox inter 14 et 15 Januarii mensis anni 1803. Non obstante vehementi frigore 13° scalae Reaumurianae, a Schrötero Hardingioque incipiebantur observationes hora 10 et 45′, Herscheliano 7 pedum telescopio 74 amplificatione continuabanturque ad horam 12; deinde Har-

(1) *Astr. Jahrb.*, 1806. pag. 159.
(2) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 55 seqq.

DINGIO LUDENIOque relinquebantur horae a 12 usque ad 5 SCHRÖTEROque ab 5 hora usque ad diluculum.

Harum observationum is erat eventus, ut hi tres omnes eadem ac antea phaenomena conspicerent; tria nimirum puncta suis ipsis locis, lineamque annuli occidentalem clarissimam, quo adhuc magis in sua sententia confirmaretur SCHRÖTERUS, annulum non rotari (1); ecce ejus verba: » dass der Ring des Saturns im » eigentlichem Verstande *überall nicht rotiret*, *sondern über jedem Punckte des » Aequators der Saturns-Kugel ein völlig*, *festes Himmelsgewölbe bildet*, *wel» ches in einen völligen festen Kreis geschlossen*, mit der Saturnskugel durch » bekannte Naturkräfte um die Sonne geführet wird;" etc.

Sequenti vespere continuabantur observationes, quo fiebat, ut annulus per 24 horas quovis momento, quando modo fieri poterat, observaretur.

Ad diem usque 20 Januarii iidem obtinebantur eventus, diebus 21, 22 et 23 nubilatus erat aër; 24, 25 et 26 eaedem observationes; die 27 nubibus obductus; 28 observationes eaedem, praeterquam quod punctum occidentale sensim sensimque longius fieret; sicque pergebant hisce observationibus usque ad diem Martii 16.

Die 4 Aprilis observare coepit SCHRÖTER (2), novo suo 5 pedum telescopio aperturae 6½ pollicum, atque 400 amplificatione, cujus speculum tam erat excellens, ut in maximis amplificationibus puram formaret imaginem. Perducebant suas observationes, usque ad diem Aprilis 26; iis se adhuc junxerat BENZENBERG; nanciscebanturque semper eosdem eventus, ut et diebus Maji 7, 12, 31 atque inde a 1 usque ad 10 Junii mensis diem. Die 21 Junii iis disparuerat annulus.

Sequenti 11 die Julii conspiciebatur iterum annulus ab HARDINGIO (3) 10 pedum tubo parallactico DOLLONDII et 126 amplificatione, sed tantum orientalis ansa eaque adhuc valde debilis, quum nunc borealis annuli facies a sole illuminaretur.

Die Julii 13 iterum videbat HARDINGIUS (4) orientalem annuli lineam, sed nihil adhuc de occidentali; etiam a GAUSSIO conspiciebatur, qui eum die 11 nondum perspicue videre poterat.

Deinde valde incertae fiebant observationes, quoniam Saturnus magis magisque in crepusculo evanescebat, ita ut non multo plus quam annuli umbra in planeta accurate conspici posset; accedebat, quod in annuli planum veniebat terra.

---

(1) *Kronogr. Fragm.*, pag. 62—65.

(2) *Kronogr. Fragm.* Th. I. pag. 119.

(3) *Ibidem*, pag. 159.

(4) *Ibidem*, pag. 161.

Diebus 19, 23, 28, 29 Julii et 2 die Augusti, conspiciebant semper adhuc in occidentali annuli linea valde subtilem et obtusum luminis ductum, quum terra adhuc ad australem conversa esset faciem.

Saturno iterum e radiis solaribus prodeunte, 3 die Novembris prima vice planetam videbat SCHRÖTER (1), telescopio Schraderiano 7 pedum; ab utraque parte apparebat annulus ut recta, sed jam valida linea, quae non ab ambabus partibus planetae annexa, etiam utroque latere salebrosa inaequalisque erat. In annuli linea orientali, ut et in occidentali se ostendebant duo visibilia puncta, ut *a* et *b* *Fig.* 38.

Amplificatione 80, orientalis annuli linea lumine erat albiore, occidentalis contra obtusiore. Hoc omnino contrarium ei erat, quod viderat in australi annuli facie, uti locum habuerat in observationibus primo semestri institutis, quum iisdem temporibus orientalis annuli linea subtilior obtusioreque lumine quam occidentalis continuo appareret; unde exiguam utriusque annuli plani inclinationem opinabatur se demonstrare posse (2).

Die 4 Novembris hora matutina, 74 et 110 amplificationibus, idem reperiebat (3). Videbat quoque eadem se extendentia puncta *a* et *b* in occidentali et orientali annuli linea, eodem immutato fixoque situ. HARDINGIUS, qui post eum observabat, idem inveniebat.

Ut singulare quid commemoratur (4), punctum occidentale *a* nunc in boreali annuli planitie, iterum in eodem situ observari, quo tamdiu observatus *Hardingianus nodus* se exserebat, eodemque modo puncta *b* et *c* eundem in boreali annuli planitie occupare locum, quo ea tamdiu in planitie australi firma et immutata observaverat; quod probare opinabatur, illos nodos esse vere prosilientes magnas inaequalitates montanas, quae, quoniam per 5 observabantur menses, vel proxime parti anteriori meridionalis annuli planitiei jaceant, et tam altae esse debeant, ut a sole qui ibi mense Junio jam occiderat, adhuc possent illuminari, vel, quod ipsi verosimilius videbatur, *in ambobus planis ut massas montanas prosilire.*

Die 5 Novembris (5) idem reperiebat. Sed valde memorabile ipsi videbatur,

---

(1) *Kronogr. Fragm.* Th. I. pag. 171.
(2) Confer. Cap. V. §. 23.
(3) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 172.
(4) *Ibidem*, pag. 174.
(5) *Ibidem*, pag. 175.

hoc matutino tempore praecipue occidentalem annuli lineam fortiore lumine, quam orientalem in oculum cadere; quum orientalis in ambabus proxime praecedentibus observationibus 3 et 4 dici Novembris fortiore lumine quam occidentalis inveniretur. Retinuerant tria puncta firmiter immutatum suum situm, quod die 6 Novembris eodem adhuc modo obtinebat. Usque ad diem 30 Novembris semper adversus aër erat, ita ut SCHRÖTER tunc suas finiret observationes. Attamen HARDINGIUS die 6 Februarii anni 1804, telescopio 5 pedum, omnia adhuc puncta eodem loco videbat.

Conclusio ergo, quam SCHRÖTER ex illa observationum serie ducebat, facile conjici potest, quam conclusionem inde a pag. 110—188, in *Kronographische Fragmente* adhuc ulterius demonstrativo modo confirmare conatur; Ecce illius verba (1):

» Durch eine so beträchtliche Reihe von Beobachtungen ist es also unwiderleg» bar mathematisch gewiss:

» Dass der Ring des Saturns im eigentlichen Verstande *überall nicht um die* » *Saturnskugel rotiret*, sondern in jedem Puncte ihres Aequators ein *unverrück*» *bar fest verbundenes Himmelsgewölbe* bildet: denn dass er ohne Rotation noth» wendig ein fest verbundenes Kreisgewölbe seyn müsse, erhellet schon à priori, » weil sonst seine einzelnen, nicht mit einander verbundenen Theile, ohne Cen» trifugalkraft, von allen Puncten seines Umkreises auf die Saturnskugel gestür» zet seyn müssten."

§. 9.

Illae ergo duorum praecipuorum Europae astronomorum ex adverso sibi oppositae sunt observationes. Utri ergo veritatis lauream adscribere debemus? Neutrum negligentiae possumus accusare, quod ex plurimis, quas fecerunt, observationibus apparet; et circumspectione, qua sunt institutae, neuter etiam illorum mala fide egit; ambo veritatem quaerebant et tamen alteruter tantum veritatem invenire potuit; annulus enim non simul immobilis esse et rotari potest. Diu nesciebant, quomodo duo sibi tam contraria phaenomena conjungerent, donec duo praeclari astronomi operam dederint litem dirimendo, scilicet LA PLACE et OLBERS; palmam vero reportavit HERSCHELIUS. Amborum explicationes, quippe magni momenti, commemorabimus, quae huc redeunt.

Secundum LA PLACE (2) annulus compositus esse posset e variis concentricis

(1) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 179 et 186.
(2) *Connaissance des temps pour l'an* 1811. pag. 452.

annulis; intervalla tamen plerorumque tam angusta essent, ut valentibus telescopiis duos tantum annulos diversos discernere queamus, qui propter irradiationem per minus fortes telescopios in unum coalescant annulum. Illud eodem modo, quod ad Jovis satellites attinet, obtineret, si quisque satelles in suo vestigio continuum relinqueret lumen; quo fieret, ut illi sic divisi annuli, ut et hae orbitae, diversas inclinationes ad aequatorem planetae haberent; eorum inclinationes suorumque nodorum situs ergo in plus vel minus longiores mutarentur periodos, quae necessario plures complecterentur annos; identidem eorum contra circum illud Saturni oscillarentur; quo apparens figura horum annulorum simul variare deberet. Rotationis motus non visibiliter hanc figuram mutaret; quoniam eo nil aliud efficeretur, quam ut altera lumen praebens pars cum alterâ commutaretur, quae in eodem sita est plano. Atque valde probabile est, inquit LA PLACE, phaenomena a SCHRÖTERO observata, talibus esse variationibus adscribenda. Si enim unum vel alterum esset illuminatum punctum, quod uni partialium annulorum firmiter adhaereret, necesse esset, ut hoc punctum aeque cito se moveret, ac ipse annulus, paucisque horis situm suum mutare videretur Unde sequitur puncta ab HERSCHELIO observata valde probabiliter hujus fuisse naturae.

Hic insuper addere possumus, valde quidem verosimile esse posse, per exiguam ad se invicem annulos habere inclinationem, quae nimis parva est, quam ut latere annuli plano observetur, quod latus planum nobis tunc videtur omnino aequabile esse; dum contra, quando annulum a margine suo angusto adspicimus, annulus partialis alter supra alterum paululum emineat; illudque ipsum esse punctum eminens, quod SCHRÖTER ejusque coöbservatores semper constanterque eodem loco viderent, videreque deberent; quoniam per annuli rotationem universum annuli planum relativum suum situm retinebat, quo fiebat, ut talia phaenomena semper eadem necessario manerent. Ita quidem secundum hanc theoriam duae illae illuminatae maculae in eadem parte Saturni ab iis observatae, suspicionem inducere possent, in plures annulos annulum esse divisum, quod, ut antea vidimus, probabile est.

§. 10.

Secundum OLBERSIUM non necesse est, ut illa, quae se nobis eo loco ostendant, ut prominentia lucida puncta, sint notabilis apparentis magnitudinis objecta; quum quidem etiam annuli esse possunt partes, quae multo vividiore luce oculos nostros afficiant, atque ita nobis se majores monstrent, licet non ultra latitu-

dinem reliquae annuli partis extensae sint. Haec autem est animadversio, qua suam Olbersius explicationem firmat (1).

Congruentia hujus animadversionis, inquit Brandes, ex multitudine patet observationum, ut v. c. in luna falciformi, quando ejus non luminatam hemisphaeram debili videmus lumine, illuminataque cornua ad majorem circulum pertinere videntur, quam circumclusum obscurum circulum, — et nos proclives sumus, ut stellis fixis multo notabiliorem apparentem magnitudinem tribuamus, quam revera possideant, etc. (2). Herschelius etiam in suis de lucidis punctis observationibus, ad hanc rem attentus fuerat, expresseque ajebat, puncta lucida, per quae ipsius annuli rotationem definiebat, non montes esse nominandos, quoniam etiam partes planitierum possent esse, quae solum vividiorem lucem reflecterent, atque a nobis sine notabili apparente magnitudine conspicerentur.

Hoc ergo ut concessum sumentes, inquirere debemus, quomodo annuli planities a sole occidente adhuc debile illuminata in nostris oculis, qui fere in annuli plano adsunt, appareat, et num etiam loca in hac tenue illuminata annuli planitie esse possint, a quibus intensior lux ad nostros perveniat oculos. Circa hoc tempus necesse est, ut annulus se nobis ostendat, ut valde contractam ellipsin, quae parum a linea differat, atque ab utraque Saturni emineat parte. Atqui lumen, quod ab unoquoque hujus lineae puncto ad oculum accedit, tali modo computare possumus: Tenuem annuli lineam sine dubio eo loco lucidissimam videmus, quo visus nostri radius transeat maxime illuminatas annuli partes, vel ibi, ubi illuminati annuli crassitudo sit maxima; quandoque intensitatem luminis annuli illuminati ex latitudine computamus, sequentem acquirimus propositionem: In *Fig.* 39 orbis Saturni cum ambobus annulis depictus est, secundum veras diametrorum relationes; nigri annuli intervalla planetam et annulos inter proponunt. Ipsi Saturno nihil porro inest, quod ad nostras observationes, quam quod nos impediat, illam annuli partem agnoscere, quae interjacet lineas

---

(1) Hanc Olbersii explicationem commemorat Brandes in suis operibus: *Briefe über die Astronomie*, atque *Vorlesungen über die Astronomie*, eamque Olbers ipse valde laudat velut egregie et ample propositam. Vid. *Astron. Nachr.*, B. XI. N°. 241. Inde est quod hanc explicationem describam ex opere *Vorlesungen über die Astronomie.*

(2) Sed hic observandum est, illam visus illusionem tantum oculo non armato locum habere, sed ope autem telescopii disparere, nosque ambos lunae circuli circuitus aeque magnos, stellasque fixas, ut puncta sine dimensionibus videre. Quatenus haec Brandesii thesis, hujus rei ratione habita, fundata sit, non inquiram; lucidae annuli maculae optimis sunt observatae telescopiis.

AB et A′B′. Ut splendorem partium annuli nobis visibilium inter se comparemus, observandum est, in lineis AB et A′B′ nobis non tot splendentia puncta offerri, quam in lineis CD et C′D′; hoc est, illa regio, quae medium fere tenet inter Saturni marginem et annuli extremitatem, nobis multo lucidior apparere debet, quam regio margine Saturni. Ille major unius loci splendor apparebit, qui fere in medio brachio annuli jaceat, semper locum habere, rotationem habeat annulus nec ne, quoniam in CD vel C′D′ latissimus ideoque etiam lucidissime apparens locus manet. Ut melius adhuc intelligamus, quomodo illuminati annuli latitudo inde a planeta crescat, porro propter utriusque annuli obscurum intervallum iterum decrescat et deinde tunc rursus accrescat et decrescat, observemus *Fig.* 40 in qua *ab* dimidiam habet magnitudinem, ratione habita latitudinis utriusque annuli partium lucidarum punctorum jacentium in AB; *cd* dimidiam habet magnitudinem, quam latitudo partium lucidarum in CD; eodem modo *gh* atque *ik* latitudinem annulorum ostendunt, locorum huc pertinentium; atque figura nunc ostendit, quod, licet nobis annulus appareat, ut linea splendens *al*, ille tamen in *c* multo splendentior apparitura sit, quam in aliis locis, atque in *i* rursus splendentior quam in *g*.

Si ergo comparamus hanc computationem punctorum annuli lucidorum cum observationibus Schröteri, invenimus eum in parte annuli occidentali, splendentissimum luminis punctum valde accurate in *c* vidisse, atque etiam a latere orientali splendentissimum punctum proxime cum puncto respondente *c′* convenire; atqui causa praecipua tali modo videtur bene explicari posse. Ut quaedam adhuc accedentia explicemus, possimus assumere parvam ad se habere annulos inclinationem. Si enim *Fig.* 39 latus HEG annuli exterioris aliquatenus supra annuli planum KLM jaceret, primum in ultimum projiceret umbram, cujus limites per KLMN proponi possemus, quo fieret, ut lumen alterius brachii annuli insigniter debilitaretur, posset quoque unus annulus, quod ad alterum, talem situm assumere, ut phaenomena adhuc perfectiorem acciperent explicationem. Quo autem hoc tantum hypotheticum est, hic satis sit ostendisse, hanc explicationem de praecipuo phaenomeno omnino commodum eventum praebere.

§. 11.

Majore adhuc accuratione diversas, quas annuli facies reflectit, intensitates, Olbersius (1) computavit. Hunc in finem, utramque annulum, omnesque ipso-

(1) *Astr. Nachr.* B. XI. N°. 241. pag. 1.

rum partes in uno plano sitas esse statuebat, designans per R_{I} et R_{III} interiores atque per R_{II} et R_{IV} exteriores utriusque annuli radios. Abscissae in majore axi ellipseos annuli inde ab annuli centro computata $= x$ ponens, illuminatarum partium quantitas, quae in abscissarum linea perpendiculariter erecta ordinata y sitae sunt, quod attinet ad quodque punctum x, sequenti formula continentur

$$y = \sqrt{(R^2_{II} - x^2)} - \sqrt{(R^2_{I} - x^2)} + \sqrt{(R^2_{IV} - x^2)} - \sqrt{(R^2_{III} - x^2)}.$$

Quando intuemur hanc formulam, eam videmus fundatam in theoria, quam Brandes statuit, eamque haberi posse velut aequationem curvae in *Fig.* 40. Relatio, quam haec aequatio exprimit, semper eadem manet, quam angusta quoque ellipsis annuli fiat, atque propterea tunc quoque locum habet, quando ea in exigua oculi elevatione trans annuli faciem nobis tantum ut tenuis ductus apparet. Ita ut intensitas luminis separatorum punctorum x in ansis in relatione cum y sint. Atqui pro y, ut etiam ex figura possumus videre, in unaquaque ansa adsunt duo maxima atque unum minimum. Ut nobis proponere possimus luminis partium diversarum ansarum intensitatem, Olbersius secundum Struvei dimensiones, scilicet

Saturni aequatorialis radius	. . . . =	8″,996
Internus interioris annuli radius sive R_{I}	. . . =	13 ,334
Externus » » » » R_{II}	. . . =	17 ,238
Internus exterioris » » » R_{III}	. . . =	17 ,645
Externus » » » » R_{IV}	. . . =	20 ,048

sequentem tabulam computavit, atque hic luminis intensitatem ansarum immediate ad planetae marginem = 1,000 assumsit:

$x =$ 8″,996	. . . intensitas luminis =	1,000	
11 ,000	. . . .	1,143	
12 ,500	. . . .	1,386	
13 ,334	. . . .	1,886	maximam primam
15 ,000	. . . .	1,580	
16 ,000	. . . .	1,425	
17 ,238	. . . .	0,560	minimam
17 ,645	. . . .	1,254	maximam secundam
18 ,500	. . . .	1,016	
19 ,000	. . . .	0,842	
20 ,048	. . . .	0,000	

Brevitatis causa, hic non addam computationes; nonnullarum quidem valores ipse computavi, quos inveni perfecte cum iis, quae datae erant, convenire.

Ex ea tabula perfectam possumus nancisci ideam de phoenomenis, quae annulorum ansae praebent. Videmus quoque in unaquaque ansa necesse esse, ut se duo lucida loca ostendant; unus locus nempe valde splendens atque extensus in medio fere ansarum; atque unus insigniter minor difficiliorque distinctu, magis ad earum finem. Quum illud quod clarum apparet, etiam videatur majus esse, facile fieri potest, ut illi duo luminis nodi, montium instar habeantur; hincque Schröterus hos luminis nodos et in parte annuli australi iisdem locis, et in boreali videre debebat.

Huc quoque annotationem addit Olbersius, illam nempe regularem apparitionem duorum lucidorum luminis nodorum in quaque ansa supponere, ambos annulos, in omnibus suis partibus, in uno eodemque plano jacere. Si habeant ad se exiguam inclinationem annuli (quae valde verosimilis est, quoniam, in reapparitionum initio, occidentalis ansa plerumque magis perspicue intensioreque lumine quam orientalis se ostendit), fortasse et ipsae singulares annulorum partes non in uno eodemque plano jacent; quo fit, ut pleraeque irregularitates in phaenomenis supra memoratis occurrant, praecipue quando terra vel sol proxime annuli plano accedit. In priore casu partes anteriores multas interiorum tegerent, aliasque magna sua umbra obscurarent. Hoc locum habebat mense Decembri anni 1832, quapropter luminis nodi initio se non ostendebant, atque demum deinceps apparebant, quando sol se magis magisque elevabat supra annuli planum; quamquam e terra visae ansae clariores, simul vero angustiores apparerent. Alter obtinet casus eo tempore, quo per annuli planum terra transit, quod obtinuit Aprili et Junio mensibus anni 1833. Qui ultimi transitus multo accuratius quam illi transitus plani annuli per solem observari possunt.

§. 12.

Quid vero harum memorabilium epocharum observationes de illis lucidis punctis inaequalitatibusque docuerunt? sine dubio expectaremus, propter eximios magnosque reflectores refractoresque, quibus plurima *Europae* speculae sunt praeditae, litem Herschelium inter Schröterumque nunc omnino accuratis observationibus esse diremtam. Accuratae observationes quoad minus favens aëris temperies sinebat, a praestantissimis viris institutae; idque optimis instrumentis, certe non defecere; nec tamen nobis gratulari possumus felicem eum eventum, qui expectandus fuisset . . . .

Observationes huc pertinentes quam brevissime jam referemus; sunt sequentes:

Schwabe (1) observans *Dessaviae* die Decembris 1, anni 1832, a tempore matutino, ab hora scilicet $4\frac{1}{2}$ usque ad horam $7\frac{1}{2}$, ope tubi Fraunhoferi, 5 pedum, atque 216, 288 et 324 amplificationibus; comperiebat annulum omnino adhuc invisibilem esse, certo tamen videbat in directione ansae orientalis subtile luminis punctum, quod per trium horarum observationem non mutabatur situ; licet propter aëris motum saepius ex oculis abiret, semper tamen eodem loco rursus apparebat.

Quum usque ad 12 diem Decembris propter aëris intemperiem nullae observationes institui possent, hac vespera annulum perspicue videbat, licet obtusum, dignoscere tamen eum poterat Frauenhoferiano $3\frac{1}{2}$ pedum tubo atque 126 et 168 amplificationibus. Amplificatione 216 tubi 6 pedum observabat occidentalem ansam universe claram esse, contra apud *a Fig.* 41, orientalem aliquatenus clariorem neque adhaerere planctae, apud *b* autem fere invisibilem fieri; quo fiebat, ut *b* ab obscuro adeo distinctum esset, ut in $3\frac{1}{2}$ pedum tubo atque 126 amplificatione punctum luminis esse videretur. Ipse multa cum verosimilitudine opinabatur, *a* esse eandem, quam primo die Decembris viderat, partem. Praeterea eodem die occidentalem ansam non nisi paulo breviorem, aliquatenus clariorem latioremque videbat, obtusiorem autem et magis indefinitam orientali, quae angustior, acutior et ut ipsi videbatur, quodammodo clarior erat.

Die 18 Januarii anni 1833 propter annuli illuminationem, quae accreverat lucidus locus, minus eximie apparebat, attamen eum perspicue adhuc dignoscere valebat, atque observare in ejus immutato situ matutino tempore inde ab hora 1 usque ad 7, atque nunc etiam orientalis ansa adhaerebat planetae, quamvis ea in hac regione adhuc longe obtusior esset. Ceterum illa ansa in universum claritate et perspicuitate parum ab occidentali differebat.

Die Februarii 2, lucidum locum *a* non amplius certo distinguere poterat, continuo autem occidentalis ansa aliquatenus latior, obtusior et magis indefinita, atque orientalis angustior et multo acutior apparebat.

Idem ipsum in omnibus suis observationibus reperiebat, quas instituebat mensibus Februario Martioque.

Die 2 Aprilis per 6 pedum telescopium, 288 amplificatione, ansae valde eximie erant dispares, quum orientalis esset longior debiliorque occidentali; ejus phases fere per totum vidit mensem, neque aliquid aderat luminis punctorum, prae-

---

(1) *Astron. Nachr.* N°. 239. pag. 383. et *Beilage zu* N°. 249. pag. 153.

terquam die Aprilis 27, quando in ansa orientali, quae minus lucem occidentali praebebat, nonnunquam lucidum punctum *a* opinabatur se videre.

Die 8 atque 13 Junii nonnunquam putabat se valde subtile luminis punctum in orientali videre ansa.

Diebus 14, 15 et 18 Junii ansam occidentalem vidit aliquantum clarius atque se usque ad planetam extendentem, quum orientalis demum visibilis esse aliqua planetae distantia, ostenderetque se locus clarus *a* lucidiorem ansâ orientali.

Diebus 24 et 25 Junii occidentalis ansa permulto brevior erat, universe clara, sed obtusiore aliquo lumine quam orientalis, quae longior erat, magisque obtusa versus planetam, sed ad finem orientalem clarior; die 25 lucidus locus *a* in orientali ansa ipsi videbatur ex duobus constare nodis.

Die Julii 16 eadem videbat phaenomena, praeterquam quod lucidus locus *a* longius videretur extensus, quum pars ansae orientalis ad planetam sita adhuc valde tenuis esset.

Valz (1) *Nemausi* mense Aprilis anni 1833 neque luminis puncta neque mutationes in ansis indagare potuit, neque inde ab 8 ad 14 diem Junii ulla luminis puncta vidit.

Die Junii 15, quando iterum ei visibilis fieri annulus incipiebat, hora $8\frac{1}{4}$ vespertina tubi ope Dollondii pollicum $3\frac{1}{2}$ aperturâ atque 80 amplificatione, varias conspiciebat perspicuas in ansis mutationes; quippe se oblongare, condensare atque breves fieri videbantur atque etiam partim partimque evanescere; putabatque nonnunquam, se licet tenuiter puncta lucida videre. Amplificatione 150 nihil horum phaenomenorum conspicere poterat, atque, quod maxime admirabatur, una hora post, nullum quidem amplius potuit annuli vestigium videre. Sequenti vespera eadem conspicabatur in crepusculo phaenomena, quum autem vesper adesset, nil videbat amplius; quod itidem die 17 obtinuit, ita ut melius in crepusculo videret, quam nocte plena.

Mädler (2) *Anconae*, diebus 26 Februarii, 11, 12, 21, 25 atque 26 Martii mensis anni 1833, ut satis largam lineam annulum videbat, atque ab utraque

(1) *Astr. Nachr.* N°. 243. pag. 41.
(2) *Ibidem*, N°. 247. pag. 118.

parte in medio punctum lucidum, quod in orientali ansa clarius quam occidentali erat.

Die Aprilis 5 ab utraque parte se tria subtilia videre opinabatur puncta; ut et 13, 14 et 17 Aprilis, quamvis difficilius.

PETERSEN (1) *Altonae* tubo Frauenhoferiano 4 pedum foci distantia, 37 linearum aperturâ et 144 amplificatione, per totum mensem Aprilem anni 1833, orientalem videbat ansam semper multo clariorem occidentali.

Die 22 Aprilis annulum videbat perspicue velut subtilem lineam; in orientali ansa fere quinta parte ab ejus fine videbatur linea clarior esse; putabat quoque se in occidentali ansa punctum videre, quod aliquatenus esset clarius ceteris partibus, difficile autem a ceteris distingui potuit.

Die Aprilis 25 lineam permulto subtiliorem conspicatus est, perspicue tamen adhuc in utroque planetae latere conspiciendam, in ansa orientali lucidius punctum tertia parte diametri ab Saturni margine observari potuit, videbatur quoque in ansa occidentali sexta diametri parte a Saturni margine, locus lucidus in linea maxime debili esse.

Die 26 Aprilis occidentalis ansa fere disparuerat, opinabatur autem PETERSEN, una quinta diametri parte a planetae margine se locum clarum videre. In ansa orientali lucidum erat punctum, tertia diametri parte, aeque ac praecedenti die observandum, inprimis quando exiles nebulae transvehebantur, quibus tunc fiebat, ut omnes aliae ansae partes invisibiles essent, hocque solum superesset punctum.

VON BOGUSLAWSKI (2) *Breslaviae*, die 21 Aprilis anni 1833, ope 4½ pedum tubi FRAUENHOFERI, 43 lineis aperturae et amplificatione 162, occidentalem videbat ansam aliquatenus clariorem orientali, nulla lucida observabat puncta, unde annuli rotatio ejusve contrarium probaretur.

Die 25 Aprilis annulum videbat ab utraque Saturni parte ut subtilissimam maxime acutam lineam, inde ab Saturni disco sine interruptione vel partibus lucidis, in puncta subtilissima excurrentem.

---

(1) *Astron. Nachr.* N°. 249.
(2) *Ibidem*, N°. 252. pag. 209.

Diebus 19, 23, 28, 29 Julii et 2 die Augusti, conspiciebant semper adhuc in occidentali annuli linea valde subtilem et obtusum luminis ductum, quum terra adhuc ad australem conversa esset faciem.

Saturno iterum e radiis solaribus prodeunte, 3 die Novembris prima vice planetam videbat SCHRÖTER (1), telescopio Schraderiano 7 pedum; ab utraque parte apparebat annulus ut recta, sed jam valida linea, quae non ab ambabus partibus planetae annexa, etiam utroque latere salebrosa inaequalisque erat. In annuli linea orientali, ut et in occidentali se ostendebant duo visibilia puncta, ut *a* et *b* *Fig.* 38.

Amplificatione 80, orientalis annuli linea lumine erat albiore, occidentalis contra obtusiore. Hoc omnino contrarium ei erat, quod viderat in australi annuli facie, uti locum habuerat in observationibus primo semestri institutis, quum iisdem temporibus orientalis annuli linea subtilior obtusioreque lumine quam occidentalis continuo appareret; unde exiguam utriusque annuli plani inclinationem opinabatur se demonstrare posse (2).

Die 4 Novembris hora matutina, 74 et 110 amplificationibus, idem reperiebat (3). Videbat quoque eadem se extendentia puncta *a* et *b* in occidentali et orientali annuli linea, eodem immutato fixoque situ. HARDINGIUS, qui post eum observabat, idem inveniebat.

Ut singulare quid commemoratur (4), punctum occidentale *a* nunc in boreali annuli planitie, iterum in eodem situ observari, quo tamdiu observatus *Hardingianus nodus* se exserebat, eodemque modo puncta *b* et *c* eundem in boreali annuli planitie occupare locum, quo ea tamdiu in planitie australi firma et immutata observaverat; quod probare opinabatur, illos nodos esse vere prosilientes magnas inaequalitates montanas, quae, quoniam per 5 observabantur menses, vel proxime parti anteriori meridionalis annuli planitiei jaceant, et tam altae esse debeant, ut a sole qui ibi mense Junio jam occiderat, adhuc possent illuminari, vel, quod ipsi verosimilius videbatur, *in ambobus planis ut massas montanas prosilire.*

Die 5 Novembris (5) idem reperiebat. Sed valde memorabile ipsi videbatur,

---

(1) *Kronogr. Fragm.* Th. I. pag. 171.
(2) Confer. Cap. V. §. 23.
(3) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 172.
(4) *Ibidem*, pag. 174.
(5) *Ibidem*, pag. 175.

hoc matutino tempore praecipue occidentalem annuli lineam fortiore lumine, quam orientalem in oculum cadere; quum orientalis in ambabus proxime praecedentibus observationibus 3 et 4 diei Novembris fortiore lumine quam occidentalis inveniretur. Retinuerant tria puncta firmiter immutatum suum situm, quod die 6 Novembris eodem adhuc modo obtinebat. Usque ad diem 30 Novembris semper adversus aër erat, ita ut SCHRÖTER tunc suas finiret observationes. Attamen HARDINGIUS die 6 Februarii anni 1804, telescopio 5 pedum, omnia adhuc puncta eodem loco videbat.

Conclusio ergo, quam SCHRÖTER ex illa observationum serie ducebat, facile conjici potest, quam conclusionem inde a pag. 110—188, in *Kronographische Fragmente* adhuc ulterius demonstrativo modo confirmare conatur; Ecce illius verba (1):

» Durch eine so beträchtliche Reihe von Beobachtungen ist es also unwiderleg» bar mathematisch gewiss:

» Dass der Ring des Saturns im eigentlichen Verstande *überall nicht um die* » *Saturnskugel rotiret*, sondern in jedem Puncte ihres Aequators ein *unverrück*» *bar fest verbundenes Himmelsgewölbe* bildet: denn dass er ohne Rotation noth» wendig ein fest verbundenes Kreisgewölbe seyn müsse, erhellet schon à priori, » weil sonst seine einzelnen, nicht mit einander verbundenen Theile, ohne Cen» trifugalkraft, von allen Puncten seines Umkreises auf die Saturnskugel gestür» zet seyn müssten."

§. 9.

Illae ergo duorum praecipuorum Europae astronomorum ex adverso sibi oppositae sunt observationes. Utri ergo veritatis lauream adscribere debemus? Neutrum negligentiae possumus accusare, quod ex plurimis, quas fecerunt, observationibus apparet; et circumspectione, qua sunt institutae, neuter etiam illorum mala fide egit; ambo veritatem quaerebant et tamen alteruter tantum veritatem invenire potuit; annulus enim non simul immobilis esse et rotari potest. Diu nesciebant, quomodo duo sibi tam contraria phaenomena conjungerent, donec duo praeclari astronomi operam dederint litem dirimendo, scilicet LA PLACE et OLBERS; palmam vero reportavit HERSCHELIUS. Amborum explicationes, quippe magni momenti, commemorabimus, quae huc redeunt.

Secundum LA PLACE (2) annulus compositus esse posset e variis concentricis

(1) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 179 et 186.
(2) *Connaissance des temps pour l'an* 1811. pag. 452.

annulis; intervalla tamen plerorumque tam angusta essent, ut valentibus telescopiis duos tantum annulos diversos discernere queamus, qui propter irradiationem per minus fortes telescopios in unum coalescant annulum. Illud eodem modo, quod ad Jovis satellites attinet, obtineret, si quisque satelles in suo vestigio continuum relinqueret lumen; quo fieret, ut illi sic divisi annuli, ut et hae orbitae, diversas inclinationes ad aequatorem planetae haberent; eorum inclinationes suorumque nodorum situs ergo in plus vel minus longiores mutarentur periodos, quae necessario plures complecterentur annos; identidem eorum centra circum illud Saturni oscillarentur; quo apparens figura horum annulorum simul variare deberet. Rotationis motus non visibiliter hanc figuram mutaret; quoniam eo nil aliud efficeretur, quam ut altera lumen praebens pars cum alterâ commutaretur, quae in eodem sita est plano. Atque valde probabile est, inquit LA PLACE, phaenomena a SCHRÖTERO observata, talibus esse variationibus adscribenda. Si enim unum vel alterum esset illuminatum punctum, quod uni partialium annulorum firmiter adhaereret, necesse esset, ut hoc punctum aeque cito se moveret, ac ipse annulus, paucisque horis situm suum mutare videretur Unde sequitur puncta ab HERSCHELIO observata valde probabiliter hujus fuisse naturae.

Hic insuper addere possumus, valde quidem verosimile esse posse, per exiguam ad se invicem annulos habere inclinationem, quae nimis parva est, quam ut latere annuli plano observetur, quod latus planum nobis tunc videtur omnino aequabile esse; dum contra, quando annulum a margine suo angusto adspicimus, annulus partialis alter supra alterum paululum emineat; illudque ipsum esse punctum eminens, quod SCHRÖTER ejusque coöbservatores semper constanterque eodem loco viderent, videreque deberent; quoniam per annuli rotationem universum annuli planum relativum suum situm retinebat, quo fiebat, ut talia phaenomena semper eadem necessario manerent. Ita quidem secundum hanc theoriam duae illae illuminatae maculae in eadem parte Saturni ab iis observatae, suspicionem inducere possent, in plures annulos annulum esse divisum, quod, ut antea vidimus, probabile est.

§. 10.

Secundum OLBERSIUM non necesse est, ut illa, quae se nobis eo loco ostendant, ut prominentia lucida puncta, sint notabilis apparentis magnitudinis objecta, quum quidem etiam annuli esse possunt partes, quae multo vividiore luce oculos nostros afficiant, atque ita nobis se majores monstrent, licet non ultra latitu-

dinem reliquae annuli partis extensae sint. Haec autem est animadversio, qua suam OLBERSIUS explicationem firmat (1).

Congruentia hujus animadversionis, inquit BRANDES, ex multitudine patet observationum, ut v. c. in luna falciformi, quando ejus non luminatam hemisphaeram debili videmus lumine, illuminataque cornua ad majorem circulum pertinere videntur, quam circumclusum obscurum circulum, — et nos proclives sumus, ut stellis fixis multo notabiliorem apparentem magnitudinem tribuamus, quam revera possideant, etc. (2). HERSCHELIUS etiam in suis de lucidis punctis observationibus, ad hanc rem attentus fuerat, expresseque ajebat, puncta lucida, per quae ipsius annuli rotationem definiebat, non montes esse nominandos, quoniam etiam partes planitierum possent esse, quae solum vividiorem lucem reflecterent, atque a nobis sine notabili apparente magnitudine conspicerentur.

Hoc ergo ut concessum sumentes, inquirere debemus, quomodo annuli planities a sole occidente adhuc debile illuminata in nostris oculis, qui fere in annuli plano adsunt, appareat, et num etiam loca in hac tenue illuminata annuli planitie esse possint, a quibus intensior lux ad nostros perveniat oculos. Circa hoc tempus necesse est, ut annulus se nobis ostendat, ut valde contractam ellipsin, quae parum a linea differat, atque ab utraque Saturni emineat parte. Atqui lumen, quod ab unoquoque hujus lineae puncto ad oculum accedit, tali modo computare possumus: Tenuem annuli lineam sine dubio eo loco lucidissimam videmus, quo visus nostri radius transeat maxime illuminatas annuli partes, vel ibi, ubi illuminati annuli crassitudo sit maxima; quandoque intensitatem luminis annuli illuminati ex latitudine computamus, sequentem acquirimus propositionem: In *Fig.* 39 orbis Saturni cum ambobus annulis depictus est, secundum veras diametrorum relationes; nigri annuli intervalla planetam et annulos inter proponunt. Ipsi Saturno nihil porro inest, quod ad nostras observationes, quam quod nos impediat, illam annuli partem agnoscere, quae interjacet lineas

---

(1) Hanc OLBERSII explicationem commemorat BRANDES in suis operibus: *Briefe über die Astronomie*, atque *Vorlesungen über die Astronomie*, eamque OLBERS ipse valde laudat velut egregie et ample propositam. Vid. *Astron. Nachr.*, B. XI. N°. 241. Inde est quod hanc explicationem describam ex opere *Vorlesungen über die Astronomie.*

(2) Sed hic observandum est, illam visus illusionem tantum oculo non armato locum habere, sed ope autem telescopii disparere, nosque ambos lunae circuli circuitus aeque magnos, stellasque fixas, ut puncta sine dimensionibus videre. Quatenus haec BRANDESII thesis, hujus rei ratione habita, fundata sit, non inquiram; lucidae annuli maculae optimis sunt observatae telescopiis.

AB et A'B'. Ut splendorem partium annuli nobis visibilium inter se comparemus, observandum est, in lineis AB et A'B' nobis non tot splendentia puncta offerri, quam in lineis CD et C'D'; hoc est, illa regio, quae medium fere tenet inter Saturni marginem et annuli extremitatem, nobis multo lucidior apparere debet, quam regio margine Saturni. Ille major unius loci splendor apparebit, qui fere in medio brachio annuli jaceat, semper locum habere, rotationem habeat annulus nec ne, quoniam in CD vel C'D' latissimus ideoque etiam lucidissime apparens locus manet. Ut melius adhuc intelligamus, quomodo illuminati annuli latitudo inde a planeta crescat, porro propter utriusque annuli obscurum intervallum iterum decrescat et deinde tunc rursus accrescat et decrescat, observemus *Fig.* 40 in qua *ab* dimidiam habet magnitudinem, ratione habita latitudinis utriusque annuli partium lucidarum punctorum jacentium in AB; *cd* dimidiam habet magnitudinem, quam latitudo partium lucidarum in CD; eodem modo *gh* atque *ik* latitudinem annulorum ostendunt, locorum huc pertinentium; atque figura nunc ostendit, quod, licet nobis annulus appareat, ut linea splendens *al*, ille tamen in *c* multo splendentior apparitura sit, quam in aliis locis, atque in *i* rursus splendentior quam in *g*.

Si ergo comparamus hanc computationem punctorum annuli lucidorum cum observationibus Schröteri, invenimus eum in parte annuli occidentali, splendentissimum luminis punctum valde accurate in *c* vidisse, atque etiam a latere orientali splendentissimum punctum proxime cum puncto respondente *c'* convenire; atqui causa praecipua tali modo videtur bene explicari posse. Ut quaedam adhuc accedentia explicemus, possimus assumere parvam ad se habere annulos inclinationem. Si enim *Fig.* 39 latus HEG annuli exterioris aliquatenus supra annuli planum KLM jaceret, primum in ultimum projiceret umbram, cujus limites per KLMN proponi possemus, quo fieret, ut lumen alterius brachii annuli insigniter debilitaretur, posset quoque unus annulus, quod ad alterum, talem situm assumere, ut phaenomena adhuc perfectiorem acciperent explicationem. Quo autem hoc tantum hypotheticum est, hic satis sit ostendisse, hanc explicationem de praecipuo phaenomeno omnino commodum eventum praebere.

§. 11.

Majore adhuc accuratione diversas, quas annuli facies reflectit, intensitates, Olbersius (1) computavit. Hunc in finem, utramque annulum, omnesque ipso-

(1) *Astr. Nachr.* B. XI. N°. 241. pag. 1.

rum partes in uno plano sitas esse statuebat, designans per R_{I} et R_{III} interiores atque per R_{II} et R_{IV} exteriores utriusque annuli radios. Abscissae in majore axi ellipseos annuli inde ab annuli centro computata $= x$ ponens, illuminatarum partium quantitas, quae in abscissarum linea perpendiculariter erecta ordinata y sitae sunt, quod attinet ad quodque punctum x, sequenti formula continentur

$$y = \sqrt{(R^2_{II} - x^2)} - \sqrt{(R^2_{I} - x^2)} + \sqrt{(R^2_{IV} - x^2)} - \sqrt{(R^2_{III} - x^2)}.$$

Quando intuemur hanc formulam, eam videmus fundatam in theoria, quam Brandes statuit, eamque haberi posse velut aequationem curvae in *Fig.* 40. Relatio, quam haec aequatio exprimit, semper eadem manet, quam angusta quoque ellipsis annuli fiat, atque propterea tunc quoque locum habet, quando ea in exigua oculi elevatione trans annuli faciem nobis tantum ut tenuis ductus apparet. Ita ut intensitas luminis separatorum punctorum x in ansis in relatione cum y sint. Atqui pro y, ut etiam ex figura possumus videre, in unaquaque ansa adsunt duo maxima atque unum minimum. Ut nobis proponere possimus luminis partium diversarum ansarum intensitatem, Olbersius secundum Struvei dimensiones, scilicet

Saturni aequatorialis radius.	= 8″,996
Internus interioris annuli radius sive R_{I} . . .	= 13 ,334
Externus » » » » R_{II} . . .	= 17 ,238
Internus exterioris » » » R_{III} . . .	= 17 ,645
Externus » » » » R_{IV} . . .	= 20 ,048

sequentem tabulam computavit, atque hic luminis intensitatem ansarum immediate ad planetae marginem = 1,000 assumsit:

$x =$ 8″,996 . . .	intensitas luminis = 1,000	
11 ,000	1,143	
12 ,500	1,386	
13 ,334	1,886	maximam primam
15 ,000	1,580	
16 ,000	1,425	
17 ,238	0,560	minimam
17 ,645	1,254	maximam secundam
18 ,500	1,016	
19 ,000	0,842	
20 ,048	0,000	

Brevitatis causa, hic non addam computationes; nonnullarum quidem valores ipse computavi, quos inveni perfecte cum iis, quae datae erant, convenire.

Ex ea tabula perfectam possumus nancisci ideam de phoenomenis, quae annulorum ansae praebent. Videmus quoque in unaquaque ansa necesse esse, ut se duo lucida loca ostendant; unus locus nempe valde splendens atque extensus in medio fere ansarum; atque unus insigniter minor difficiliorque distinctu, magis ad earum finem Quum illud quod clarum apparet, etiam videatur majus esse, facile fieri potest, ut illi duo luminis nodi, montium instar habeantur; hincque Schröterus hos luminis nodos et in parte annuli australi iisdem locis, et in boreali videre debebat.

Huc quoque annotationem addit Olbersius, illam nempe regularem apparitionem duorum lucidorum luminis nodorum in quaque ansa supponere, ambos annulos, in omnibus suis partibus, in uno eodemque plano jacere. Si habeant ad se exiguam inclinationem annuli (quae valde verosimilis est, quoniam, in reapparitionum initio, occidentalis ansa plerumque magis perspicue intensioreque lumine quam orientalis se ostendit), fortasse et ipsae singulares annulorum partes non in uno eodemque plano jacent; quo fit, ut pleraeque irregularitates in phaenomenis supra memoratis occurrant, praecipue quando terra vel sol proxime annuli plano accedit. In priore casu partes anteriores multas interiorum tegerent, aliasque magna sua umbra obscurarent. Hoc locum habebat mense Decembri anni 1832, quapropter luminis nodi initio se non ostendebant, atque demum deinceps apparebant, quando sol se magis magisque elevabat supra annuli planum; quamquam e terra visae ansae clariores, simul vero angustiores apparerent. Alter obtinet casus eo tempore, quo per annuli planum terra transit, quod obtinuit Aprili et Junio mensibus anni 1833. Qui ultimi transitus multo accuratius quam illi transitus plani annuli per solem observari possunt.

§. 12.

Quid vero harum memorabilium epocharum observationes de illis lucidis punctis inaequalitatibusque docuerunt? sine dubio expectaremus, propter eximios magnosque reflectores refractoresque, quibus plurima *Europae* speculae sunt praeditae, litem Herschelium inter Schröterumque nunc omnino accuratis observationibus esse diremtam. Accuratae observationes quoad minus favens aëris temperies sinebat, a praestantissimis viris institutae; idque optimis instrumentis, certe non defecere; nec tamen nobis gratulari possumus felicem eum eventum, qui expectandus fuisset . . . .

Observationes huc pertinentes quam brevissime jam referemus; sunt sequentes:

Schwabe (1) observans *Dessaviae* die Decembris 1, anni 1832, a tempore matutino, ab hora scilicet $4\frac{1}{2}$ usque ad horam $7\frac{1}{2}$, ope tubi Frauenhoferi, 5 pedum, atque 216, 288 et 324 amplificationibus; comperiebat annulum omnino adhuc invisibilem esse, certo tamen videbat in directione ansae orientalis subtile luminis punctum, quod per trium horarum observationem non mutabatur situ; licet propter aëris motum saepius ex oculis abiret, semper tamen eodem loco rursus apparebat.

Quum usque ad 12 diem Decembris propter aëris intemperiem nullae observationes institui possent, hac vespera annulum perspicue videbat, licet obtusum, dignoscere tamen eum poterat Frauenhoferiano $3\frac{1}{2}$ pedum tubo atque 126 et 168 amplificationibus. Amplificatione 216 tubi 6 pedum observabat occidentalem ansam universe claram esse, contra apud *a Fig.* 41, orientalem aliquatenus clariorem neque adhaerere planetae, apud *b* autem fere invisibilem fieri; quo fiebat, ut *b* ab obscuro adeo distinctum esset, ut in $3\frac{1}{2}$ pedum tubo atque 126 amplificatione punctum luminis esse videretur. Ipse multa cum verosimilitudine opinabatur, *a* esse eandem, quam primo die Decembris viderat, partem. Praeterea eodem die occidentalem ansam non nisi paulo breviorem, aliquatenus clariorem latioremque videbat, obtusiorem autem et magis indefinitam orientali, quae angustior, acutior et ut ipsi videbatur, quodammodo clarior erat.

Die 18 Januarii anni 1833 propter annuli illuminationem, quae accreverat lucidus locus, minus eximie apparebat, attamen eum perspicue adhuc dignoscere valebat, atque observare in ejus immutato situ matutino tempore inde ab hora 1 usque ad 7, atque nunc etiam orientalis ansa adhaerebat planetae, quamvis ea in hac regione adhuc longe obtusior esset. Ceterum illa ansa in universum claritate et perspicuitate parum ab occidentali differebat.

Die Februarii 2, lucidum locum *a* non amplius certo distinguere poterat, continuo autem occidentalis ansa aliquatenus latior, obtusior et magis indefinita, atque orientalis angustior et multo acutior apparebat.

Idem ipsum in omnibus suis observationibus reperiebat, quas instituebat mensibus Februario Martioque.

Die 2 Aprilis per 6 pedum telescopium, 288 amplificatione, ansae valde eximie erant dispares, quum orientalis esset longior debiliorque occidentali; ejus phases fere per totum vidit mensem, neque aliquid aderat luminis punctorum, prae-

(1) *Astron. Nachr.* N°. 239. pag. 383. et *Beilage zu* N°. 249. pag. 153.

terquam die Aprilis 27, quando in ansa orientali, quae minus lucem occidentali praebebat, nonnunquam lucidum punctum *a* opinabatur se videre.

Die 8 atque 13 Junii nonnunquam putabat se valde subtile luminis punctum in orientali videre ansa.

Diebus 14, 15 et 18 Junii ansam occidentalem vidit aliquantum clarius atque se usque ad planetam extendentem, quum orientalis demum visibilis esse aliqua planetae distantia, ostenderetque se locus clarus *a* lucidiorem ansâ orientali.

Diebus 24 et 25 Junii occidentalis ansa permulto brevior erat, universe clara, sed obtusiore aliquo lumine quam orientalis, quae longior erat, magisque obtusa versus planetam, sed ad finem orientalem clarior; die 25 lucidus locus *a* in orientali ansa ipsi videbatur ex duobus constare nodis.

Die Julii 16 eadem videbat phaenomena, praeterquam quod lucidus locus *a* longius videretur extensus, quum pars ansae orientalis ad planetam sita adhuc valde tenuis esset.

Valz (1) *Nemausi* mense Aprilis anni 1833 neque luminis puncta neque mutationes in ansis indagare potuit, neque inde ab 8 ad 14 diem Junii ulla luminis puncta vidit.

Die Junii 15, quando iterum ei visibilis fieri annulus incipiebat, hora $8\frac{1}{2}$ vespertina tubi ope Dollondii pollicum $3\frac{1}{2}$ aperturâ atque 80 amplificatione, varias conspiciebat perspicuas in ansis mutationes; quippe se oblongare, condensare atque breves fieri videbantur atque etiam partim partimque evanescere; putabatque nonnunquam, se licet tenuiter puncta lucida videre. Amplificatione 150 nihil horum phaenomenorum conspicere poterat, atque, quod maxime admirabatur, una hora post, nullum quidem amplius potuit annuli vestigium videre. Sequenti vespera eadem conspicabatur in crepusculo phaenomena, quum autem vesper adesset, nil videbat amplius; quod itidem die 17 obtinuit, ita ut melius in crepusculo videret, quam nocte plena.

Mädler (2) *Anconae*, diebus 26 Februarii, 11, 12, 21, 25 atque 26 Martii mensis anni 1833, ut satis largam lineam annulum videbat, atque ab utraque

---

(1) *Astr. Nachr.* N°. 243. pag. 41.
(2) *Ibidem*, N°. 247. pag. 118.

parte in medio punctum lucidum, quod in orientali ansa clarius quam occidentali erat.

Die Aprilis 5 ab utraque parte se tria subtilia videre opinabatur puncta; ut et 13, 14 et 17 Aprilis, quamvis difficilius.

PETERSEN (1) *Altonae* tubo Frauenhoferiano 4 pedum foci distantia, 37 linearum apertura et 144 amplificatione, per totum mensem Aprilem anni 1833, orientalem videbat ansam semper multo clariorem occidentali.

Die 22 Aprilis annulum videbat perspicue velut subtilem lineam; in orientali ansa fere quinta parte ab ejus fine videbatur linea clarior esse; putabat quoque se in occidentali ansa punctum videre, quod aliquatenus esset clarius ceteris partibus, difficile autem a ceteris distingui potuit.

Die Aprilis 25 lineam permulto subtiliorem conspicatus est, perspicue tamen adhuc in utroque planetae latere conspiciendam, in ansa orientali lucidius punctum tertia parte diametri ab Saturni margine observari potuit, videbatur quoque in ansa occidentali sexta diametri parte a Saturni margine, locus lucidus in linea maxime debili esse.

Die 26 Aprilis occidentalis ansa fere disparuerat, opinabatur autem PETERSEN, una quinta diametri parte a planetae margine se locum clarum videre. In ansa orientali lucidum erat punctum, tertia diametri parte, aeque ac praecedenti die observandum, inprimis quando exiles nebulae transvehebantur, quibus tunc fiebat, ut omnes aliae ansae partes invisibiles essent, hocque solum superesset punctum.

VON BOGUSLAWSKI (2) *Breslaviae*, die 21 Aprilis anni 1833, ope 4½ pedum tubi FRAUENHOFERI, 43 lineis aperturae et amplificatione 162, occidentalem videbat ansam aliquatenus clariorem orientali, nulla lucida observabat puncta, unde annuli rotatio ejusve contrarium probaretur.

Die 25 Aprilis annulum videbat ab utraque Saturni parte ut subtilissimam maxime acutam lineam, inde ab Saturni disco sine interruptione vel partibus lucidis, in puncta subtilissima excurrentem.

---

(1) *Astron. Nachr.* N°. 249.
(2) *Ibidem*, N°. 252. pag. 209.

Die Aprilis 26 ansa ipsi videbatur orientalis obtusiore esse lumine, omnino autem uniformi inde a planeta usque ad extremitatem; in ansa occidentali contra extremae duae tertiae partis aliquatenus lucidioris erant quam interna tertia pars.

Die 13 Junii, quum iterum appareret annulus, tantum occidentalis ansa ipsi apparebat ut maxime angustus, non acute terminatus ductus, quum usque ad planetam esset velut non interrupta linea.

Diebus Junii 16 et 17, continuo occidentalem ansam acutiorem et magis perspicuam orientali videbat; nulla autem lucida puncta.

Bianchi (1) *Cattajone* memorat, se per Aprilem mensem nulla lucida puncta in annulo vidisse.

Diebus autem 19 atque 22 Junii anni 1833, semper hora vespertina 9 ansam orientalem lucidis punctis praeditam intuebatur, et die 24 Junii inaequalitates videbat atque luminis scintillationes in hac ansa, quod idem ab illius adjutore Bernhardi conspiciebatur. Meminit etiam Santini *Patavii*, se die Junii 18 in orientali ansa luminis puncta vidisse.

§. 13.

Ex his observationibus videmus, quantacunque cura et diligentia, a praecipuis *Europae* astronomis institutae sint, illas nobis non certiorem cognitionem de annuli rotatione praebere. Quando has comparemus observationes cum iis Herschelii Schröterique, proxime cum illis posterioris conveniunt. Mirum tamen est, illa lucida puncta in hisce ultimis memorabilibus epochis tam parce esse observata, dum a Schrötero, Hardingio atque Herschelio tam frequenter atque abunde conspicerentur observarenturque imo dum Herrchelius (2) maculam illam, quam *a* vocat, quaeque prope exteriorem marginem erat sita, inde a 28 die Julii usque ad 24 Decembris diem anni 1789, 300 periodos sive revolutiones maxima regularitate percurrere vidit, praeterque illam adhuc quatuor alias maculas.

Quomodocunque sit, non est, quod de annuli rotatione dubitemus; huic rei satis documento sunt observationes summa sollicitudine curaque ab Herschelio institutae. Difficultates, quae nobis hac de re ex Schröteri Hardingiique obser-

---

(1) *Astron. Nachr.*, N°. 252. pag. 197.

(2) *Phil. Transact. for the Year* 1792. Part. I. pag. 6.

vationibus obstabant, e medio plane sublatae sunt explicatione Olbersii tam ingeniosa.

Illam adhuc Olbersio capere licebat voluptatem, ut Hardingio, qui Schrötero toties observationum comes fuerat, atque particeps, magis magisque de suae explicationis veritate persuaderet; quamquam apud Schröterum amicum suum immortalem nunquam idem valuit efficere (1).

Nullum ergo dubium, ut diximus, contra annuli rotationem afferri potest; quum enim in rerum universitate eaedem sint naturae leges, necesse est, ut Saturnus, qui vi sua attrahente suas lunas in earum orbitis teneat, etiam in annulum, qui tanto propior ipsi situs est, vim attrahentem exerceat. Nunc autem ponere possemus, si Saturnus in ipso figurae atque gravitatis centro annuli esset, annulum vel annulos quoque, quum ab omnibus partibus aequabiliter attraherentur, ita suspensos circa planetam consistere posse. At hic quoque simul animadvertendum est, quod, siquidem annulus parum per modo discederet a situ illo aequilibrii sui, necessario annulus accelerato motu in ipsum planetam funderetur, quippe simplex elementorum, e quibus hi annuli constant, cohaesio non par sit illis retinendis. Facile quoque est, ut e legibus phaenomenisque in natura obviis demonstretur, talem immutabilem situm, in quo ipsum ut aequilibrium constet, non indesinenter locum habere posse, ita ut haud tanquam possibile assumere queamus, tali modo annulum in sempiternum fluctuantem teneri posse. Quum autem contra annulus vel aliqua ejus partium rotationem habeat circa axem, qui perpendiculariter in ejus plano erectus sit, et per Saturni centrum transeat, tamen annulus, et tunc quoque, quando non accurate in ejus medio Saturnus est, aeque bene propter institutam vim centrifugam centripetamque, aequabili potest situ teneri, velut luna in sua orbita circa unum vel alterum planetam; quoniam hac ratione ejus partium gravitas versus planetam, vi centrifuga, ex earum rotatione deducta, in aequilibrio tenetur. Ita ut haec rotatio maxime necessaria sit habenda, ut annuli in continuo serventur aequilibrio, in quo eos observamus. Haec consideratio alio adhuc fundamento nititur, quando nempe annulus quietus, eo duntaxat in aequilibrio teneretur, quod ab omni parte simul ad centrum traheretur, tamen quaeque pars non valde firmiter cum totius annuli massa conjuncta, certissime in Saturnum caderet, si tantum ipsa sola omnium partium cohaesio aequilibrii causa esset. Quum autem om-

---

(1) *Astron. Nachr.*, N°. 241.

nia, quae tanquam materiam cognoscimus, fragilitati sint obnoxia, et ne rupes quidem destructionis sint immunes, attamen, quatenus Saturni annulus haud unice immutabilis esset, et ab omni ruina remotus, quod vero assumere non possumus, ejus partes deinceps in Saturnum deciderent. Quando contra ponimus, unamquamque annuli partem vi centrifuga animatam esse, ut v. c. nostra luna, ne nonadhaerentia quidem in annulo corpora in Saturnum decidant, sed suas rotationes aeque ac luna perficient. Theoria quoque, ut jam ostendimus, docet, planum aliquod, per rotationis axem in annuli plano perpendiculariter erectum, annulum secundum ellipsin secare debere, cujus prolongatus major axis per planetae centrum transit, atque adeo rotationis annuli durationem fere eandem futuram atque satellitis revolutionem, qui in centri distantia ellipseos circa Saturnum movetur; quod ergo etiam Herschelii observationes confirmarunt. Dicta ellipsis quod ad varias annuli partes mutabilis esse potest atque ita annulus ipse inaequalis crassitiei; sicut tunc etiam, ut vidimus, observationes, quae disparitionum reapparitionumque annuli tempore factae sunt, illas inaequalitates perspicue videntur ostendere, quae ipsae quemadmodum etiam theoria docet, necessariae sunt, ut annuli aequilibrium confirmetur: si enim in omnibus ejus partibus symmetrice esset formatus, minima quidem vis externa, ut v. c. satelles aliquis, satis esset, ut eum de loco eriperet; cujus esset sequela, ut in planetam praecipitaretur.

Atque ita quamque annuli particulam licet tanquam parvum satellitem Saturni considerare, ipsumque annulum, sicut Cassini fecit, ut collectionem vel circuliformem seriem satellitum sibi junctorum inaequalis magnitudinis vel ut lunarum coronam, quae per solis actionem, perturbationesque septem lunarum, quae Saturnum cingunt, oscillationibus sive parvis sive magnis subjecta sit, sed itidem universe semper medium plani sui situm servet. Necesse quidem est, ut haec corpora velut sibi juncta consideremus; si enim haec corpora parva libera essent et a se invicem non subjecta, eorum celeritates pro variis distantiis quod ad planetae centrum mutarentur; centro Saturni proxime sita, secundum tertiam Kepleri legem, citius, magis vero remota tardius se moverent; atque si celeritatem assumeremus eam, quae convenit cum medio annuli circuitu, aliarum partium celeritates ea inde recedere facerent, sitve in plus sitve in minus. Si vero hae partes inter se junguntur adhaerentque ad corpus solidum formandum, compensatio inter earum motus locum haberet; maxime celeres celeritatis partem cum tardissimis communicabunt, haeque rursus cum illis tarditatis partem; ita hi oppositi conatus inter se aequilibrium efficient, quo fiet ut tantum medius maneat motus, qui omnibus est partibus communis atque ille mediae circum-

ferentiae erit. Illud tamen non impedit, quod utrique annulo diversum quidem motum adscribere possimus, observationibus rite institutis confirmandum est.

CAPUT X.

DE ANNULI ORIGINE CONJECTURAE.

§. 1.

Singulare illud phaenomenon, quo Saturnus tantopere distinguitur ab reliquis systematis solaris planetis, jam pridem huic quaestioni ansam praebuit: quaenam hujus rei causa est? Quomodo hicce annulus, sive hoc phaenomenon incepit existere?

En occasionem variis conjecturis contemplationibusque oblatam, quibus plures astronomi se occupaverunt. Praecipuas earum, quae ad meam notitiam pervenerint, breviter commemorabo.

§. 2.

Ut primo capite vidimus, Roberval statuit, annulum originem suam exhalationibus debere, quae vel ex aequatore vel ex Saturni zona torrida adscenderent atque ita solis lucem reflecterent.

Huic etiam Whiston consentire videtur (1).

Alii autem censebant philosophi (2), esse phaenomena, quae originem haberent, ex Saturni situ magis minusve obliquo. Ad hoc etiam Hodierna pertinebat, qui, ut primo capite vidimus, maculas esse putabat vacua illa annulum inter et planetam intervalla, ita ut, secundum ejus assertionem sphaeroïdis cum duabus obscuris

---

(1) Whiston, *Praelect. Astron.*

(2) Dionis de Séjour, *Essai sur les phén. rel. aux dispar. périod. de l'anneau de Saturne*, pag. II et 400.

maculis figuram Saturnus haberet, illumque planetam circa suum axem rotantem, illos varios aspectus, qui observarentur, ostendere.

Credebat DE MAIRAN (1), ab origine multo majorem Saturnum fuisse, quam nunc; annulumque reliquias esse veteris aequatoris planetae, qui nunc ad minus reductus esset volumen.

Secundum BUFFONUM (2), propter vehementem obliquam concussionem, quam in initio Saturnus acceperet, vis centrifuga vim gravitatis superaverat, et hinc a planetae aequatore ejusque proxime sitis partibus satis magna materiei quantitas divulsa fuerat, quae necessario annuli formam assumere deberet, cujus planum fere idem esset atque illud aequatoris planetae; atque hac materiei parte, quae annulum formet, in aequatoris propinquitate divulsâ, sub aequatore Saturnus tantopere submissus fuerat; quo etiam fieret, quod invita magna illa celeritate, qua supponebat circa suum axem rotari planetam, planetae diametri non tantum, quantum illi jovis, discrepare possint; quod discrimen majus est undecima parte.

Illa sententia non multum ab ea PLATENII (3) *Hallermundani* differt, qui ponebat initio sphaeram fluidam fuisse Saturnum, accipientem autem tam celerem circa axem motum, ut nonnullae partes massae liquidae distorquerentur, pressioneque vel gravitatione ad Saturni centrum, quod ad illas partes cessante, secum invicem conjungebant, hincque annulus oriebatur; atque motus, quem circa solem Saturnus habebat, ita quoque cum annulo communicabatur, quo factum est, ut planetae comes manserit.

HORNERIUS (4) quoque annulum habet aquae massam, a planeta vi centrifuga, distorsam, formamque nebulosam; itaque nubem condensatam, neque vero corpus solidum. Hujus generis massa quae tam facile dislocari potest, inquit, duntaxat potuit debuitque maximam assumere complanationis omnino complanatae perforatae lentis vel disci formam. Illud clarum lucidumque, album lumen, quo Saturnum superat, in eo ostendit materiae discrimen, quumque, nive excepta, nihil lucidius existat, nisi nubes sole illuminata, ipsi sua sententia valde probabilis videtur. Quod ad nigredinem umbrae annuli in planetam, con-

---

(1) DIONIS DE SÉJOUR, *in opere citato*, pag. 401.

(2) *Preuves de la théorie de la terre*, Art. I. *De la formation des planètes*, Amst. 1766. Tom. I. pag. 54.

(3) BODE, *Astron. Jahrb.* 1792. pag. 239.

(4) GEHLER's *Physical. Wörterbuch*, Nova editio, Band. VIII. pag. 174.

traque planetae in annulum, quam antea argumentum habebant soliditatis corporalis, ipsi documentum suae thesi praebet, atque proinde affert, in nostra terra, ubi lucis solaris intensitas centies fere major est, nubium stratum, tantum 600 vel 1000 pedum crassitudinis, valere, ut radii solares maximam partem retineantur, ita ut insignem umbram projiciat; quanto magis nubium murus, crassitudinis ad minimum 400ies majoris, id efficere valeret. Planetae umbram, quae in annulum cadit, comparat cum personarum in ita dictis paridolis (*Nebenbilder*) umbra, quae in montibus altis omni perspicuitate in oppositas nubes delineatur.

§. 3.

Secundum Maupertuisii (1) hypothesin, ex cometae cauda annulus est formatus, quam Saturnus quondam a praetereunte avulserit cometae, atque ita etiam suos vicisset satellites; illius haec fere est explicatio: cometae, quum sunt in suis periheliis, plerumque longis sunt praediti caudis, quae verosimiliter immensis fluctibus vaporum constant, per solis aestum evolutorum. Si itaque cometa in tali conditione prope potentem transit planetam, vis gravitatis planetae posset efficere, ut hic fluctus directionem mutaret eumque cogeret circa ipsum se revolvere, per ellipsin vel circulum. Cometa sive rursus novam materiam praebeat, sive quod praesens sufficiat, aliquod annuli genus circa planetam formaret, ipsum quoque corpus vel planetae nucleus attrahi posset cogique circa illum rotari. Secundum Maupertusii sententiam, tales annuli se potius circa magnos, quam parvos planetas forment, necesse est; quia propter majorem massam eorum attractiones sint fortiores, quam parvorum planetarum; etiam necesse est, ut potius se forment circa longius a sole distantes, quam circa proximos planetas; quoniam cometarum celeritas, in illis longe dissitis regionibus, retardatur, planetaeque occasionem praebet diutius suam in illum actionem exercendi, atque ita majore effectu in torrentem agendi. Haec omnia in Saturno confirmatu ei videntur.

Magnus satellitum numerus, annulique ejus magnitudo, inquit de Maupertuis, etiam hypothisi ansam praebere potuerit, varios ad hanc rem cometas contulisse, illumque eum diversorum cometaram dispendio nactum fuisse Dum annulus, quantum cunque tenuis videatur, e mira materiei quantitate formatus sit, quae ipsa satis sit valens, ut umbram in planetae discum projiciat; quum

(1) *Discours sur les differentes figures des Astres.*, Chap. VIII.

cometarum caudarum materies tam tenuis appareat, ut stellas plerumque per eas conspiciamus. Necesse ergo est, ut haec materia, gravitate condensetur planetae, circa quem rotari cogitur.

Quod ad planetas, quibus satellites sunt, nullusque annulus, hanc difficultatem tali modo tollit: quum saepius cometas conspiciamus caudae expertes, caudam esse fortuitam, quam solum acceperit cometa, propterea quod prope solem venit. Talis vero cometa tantum satellitem nec vero annulum praebere poterit. Atque ita illo censente, fieri etiam posset, ut planeta satellitem, non vero annulum nanciscatur; si cometes nimis longe a planeta dissitus esset, tantumque caudae planeta potiretur, dum nucleus ab eo evaderet. Materies quoque, quae hos annulos format, instar arcûs se continere deberet circa planetam, eum undique cingere posset atque aliquod atmosphaerae complanatae genus circa hanc formare.

De illa explicatione LA PLACE (1) animadvertit, ingeniosam quidem illam esse hypothesin, neque tamen legi gravitatis materiae omnium partium mutuae nixam, sed annulorum ad varia attractionis centra proclivitate.

§. 4.

Secundum KANTIUM (2) annuli, qui Saturnum circumdat, origo, facilius quam multa alia naturae phaenomenis explicaretur. Illum in finem statuebat, Saturnum ab origine, ut omnes ceteros planetas, cometen fuisse, qui etiam circa axem rotaretur; quando ejus orbita circuli orbitae similior fieri incipiebat, atque propterea in planetam transibat, sensim caloris aliquid amittebat, quoniam non tam prope solem accedebat; quae caudam formaverant partes condensabantur atque in planetam retrocedebant. Ab aequatore remotae partes propter rotationes circa axem, secundum motus centralis leges, ad aequatoris planum pellebantur, ab utraque ergo parte concurrebant, seque in unam massam conjungebant. Illae autem partes, quae ante suam conjunctionem in corporis planetae propinquitatem veniebant, propter rotationis motum non tantam vim centrifugam acceperant, ut gravitati penitus resisterent; decidebant ergo in planetam inque ejus propinquitate vacuum relinquebant spatium; hanc dicit esse causam quod cum planetae corpore non coaluerit sit annulus, Atqui necesse erat, ut hic annulus circum Saturnum rotaretur ae celeritate, quae in relatione esset inversa distantiae marginis ejus interioris

---

(1) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année 1787. pag 249.

(2) *Algemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels.*

ad planetae centrum. Ex illa celeritate Kantius definit planetae rotationem circa axem, suum statuens partium in aequatore celeritatem ei similem, atque tunc, unius satellitum ope, quod ad eam attinet, invenit, $6^h\ 23'\ 53''$. Porro vult annulum ex variis concentricis annulis esse compositum, qui omnes, secundum Kepleri leges, varias habeant revolutionis periodos, quo fiat, ut exteriores tardius interioribus rotentur. Quae ultima sententia, ut vidimus, jam magis magisque confirmari incipit. Apud ceteros planetas secundum ipsius sententiam talis non potuerit existere annulus, quoniam altitudo, qua partes ad planetas cadere cessant, h. e. ubi vis centrifuga vi gravitatis aequalis sit, apud ceteros planetas nimia est, quam ut ibi tot partes, quot ad annuli formationem necessariae sunt, ad illam surgere possent altitudinem. Annuli nempe ad planetam distantia necessario in eadem relatione esset ad planetae semidiametrum, qua gravitas ad vim centrifugam.

Cui conditioni quod ad Saturnum satisfiebat, quoniam interioris annuli marginis distantiam ad planetae centrum ut 8 statuebat, quum quod ad Saturni semidiametrum 5 assumeret, qui duo numeri ipsi, ut dicit, relatio erat inter gravitatem et vim centrifugam.

Si hisce fundamentis Jovi annulus esset, interioris ejus marginis distantia, dimidiam Jovis diametrum decies deberet superare, atque adeo in maxime remotum satellitem caderet, sed subtilis illa materia non tam alte posset adsurgere. Quod etiam ad terram pertineret, si annulum nancisceretur, tunc ille distantiâ 189 semidiametrorum a terra, h. e. plusquam quater cum dimidio longius quam luna debuisset remotus esse. Atque illâ distantiâ, ut Fischer inquit (1), non materiae satis esset, ex qua annulus formaretur. In tardius se moventes planetas, annuli formatio adhuc minus fieri posse ponitur.

§. 5.

Postquam pulchram annuli descriptionem dederat Littrowius (2), memoraveratque ad quam miram altitudinem in eo montes ab utraque parte, extra annuli planum emineant, atque saepe sibi ipsi oppositi sint ad altitudinem, ab utroque latere 200 milliarium geographicorum, ita ut eorum verticum distantiae saepe a 500 ad 600 milliaria geographica efficiant, planetamque Mercurium superent magnitudine, dicit, tantas massas non amplius habendas esse pro montibus, qui

(1) Fischer, *Physikalisches Wörterbuch*, Tom. IV. pag. 351.
(2) Littrow, *Populäre Astronomie*, Th. II. Abth. I. pag. 144.

tenui annuli planitie portentur, sed vera esse coelestia corpora, satellites, qui, mutua sua adhaesione constipati, propterea arcum illum magnum formaverint, annulumque clauserint, qui libere cingit planetam. Fortasse quoque, secundum ejus sententiam, septem satellites, qui Saturnum circumdant, nil aliud sunt nisi frusta annuli alicujus disrupti. Dum in praesentis annuli formatione, multitudo montium, fere aequalibus distantiis, circa planetam ad solidum arcum se sibi invicem alligarent, ab universali conjunctione, septem, iique horum montium maximi altissimique potuissent se distrahere, ut peculiaria, per se subsistentia corpora, satellites formarent; aut fortasse, inquit, hic annulus est massa, quae nondum ad perfectam evolutionem pervenerit, ac post satellitum illorum formationem superfuerit, et ex qua in posterum novi se evolvent satellites; quae hypothesis, ut ipse sentit, corroboratur, quoniam sex priorum satellitum orbitae omnes in annuli plano sitae sint.

Ut scimus, Jacobus Cassini (1) quoque statuebat, annulum ex satellitum congerie constare, qui omnes in uno eodemque plano revolutiones suas circa planetam perficiant, tam autem esse parvos, ut singuli separatim videri nequeant, et tum prope sibi invicem sitos, ut eorum etiam spatia intermedia conspici non possint, atque ita continuum corpus componere videantur. Haec etiam Muraldi (2) sententia fuit.

§. 6.

Ex universalibus fundamentis physicis Bode (3) opinabatur se colligere posse, annulum olim propter vim centralem quae in Saturnum agat, suam originem ex planetae hujus superficie ipsa sumsisse, atque se hinc ita formasse, ubi centrifuga vis, in sphaerae Saturni rotatione validissima esset, h. e. ejus in initio molles liquidasque partes in aequatoris Saturni directionem distorqueri atque ita etiam quam nunc, post solidum corpus factus est, praesentem circuli situm efficere. Secundum ejus ergo opinionem maxime verosimile esset, omnem ejus solidam massam, propter Saturni propinquitatem, accipere proclivitatem, sphaerae Saturni rotationem sequendi; si ergo haec rotatio non fieret in aequatoris plano, et hinc etiam, ut maxime secundum naturam est, simul in annuli ipsius plano, paucis

---

(1) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, année MDCCXV. pag. 47.

(2) *Nouveaux Mém. de l'Acad. royale des Sciences de Berlin*, année MDCCLXXVI. pag. 326.

(3) *Astron. Jahrb.* 1786. pag. 141.

illis horis, quas Saturnus circiter ad rotationem suam impenderet, in similibus se nobis annulus ostenderet phasibus periodicis, quales illae sunt, quas per ejus triginta annorum revolutionem circa solem observamus. Porro ex constanti annuli parallelismo analogice concluderetur, eum situm esse in plano et in aequatoris sphaerae Saturni directione atque rotari, quoniam eadem est nostrae terrae aequatoris in terrae revolutione relatio, qua fit, ut illae anni tempestatum benigna commutatio in planeta efficiatur.

§. 7.

In sua sibi phantasia Schröter fingebat, sequenti modo annulum ortum suum capere potuisse (1): quum nempe planeta Saturnus, ut et reliqui planetae, ex materia chaotica, quae illos proxime circumdaret, se constipassent, venirentque in praesentem conditionem, qua in relatione virium centripetarum centrifugarumque circa solem rotantes movere se inciperent, in dissita regione Saturni, et quidem in omnibus ejus circuitus punctis, ex materia chaotica, quae ibi adesset, infinita chaoticarum massarum multitudo, variis majoribus minoribusque diametris conglobabant, quae cunctae simul a Saturni orbe et hinc per se ab ejus centro, in maximae diametri directionem, in circulos rotantes, itaque in ejus aequatoris plano attrahebantur et ab omnibus circuitus circuli punctis ad Saturni aequatorem confluebant.

Quando autem massae illae parvo essent numero, fortasse satellites Saturni facti essent, si ad earum vis centrifuga sufficisset. Verum ad id efficiendum praeterea multitudo massarum in plurimis punctis magis minusve dissitis circulis, ortarum nimia erat; quoniam enim omnes simul ad Saturni aequatorem confluebant, jam in minoribus circulis propius sibi invicem veniebant seque magis magisque perturbabant. Hinc fiebat, ut earum vis centrifuga, quae forsitan jam per se debilis esse posset, magis magisque debilitaretur et denique tolleretur. Nunc ruebant cunctae simul majori vi celeritateque in aequatoris Saturni planum atque ad hoc ex omnibus circuli circuitus punctis; et quum denique proruentia prima corpora, in suo forte adhuc angustissimo praesentis interioris annuli circulo, prope se invicem venirent, necesse erat, ut, in adhuc molli sua conditione in solido circulo, in se et juxta se invicem firmiter intruderentur; pone quos deinceps corpora vel massae, quae ex dissitis circuli circuitibus eodem modo in aequatoris plano ad eos ruerent, inter et post eos in se confirmarent; donec tandem ultima

(1) *Kronogr. Fragm.*, Th. I. pag. 241.

illuc confluentia et se interponentia corpora simul lapides angulares firmi arcus annularis efficerent, qui tunc non possent rotari!!

Atqui ita simili modo, adhuc magis in remotioribus circuli circuitibus, neque tamen in tot stratis post se invicem orta majora minoraque corpora se constipassent; quae itidem ex omnibus circuli circuitus punctis in aequatoris plano ad Saturni centrum proruebant, quae vero, quum simultanea multitudo major esset, priusquam adhuc annulum interiorem praesentem plane possent attingere, jam inter et post se invicem se confirmarent et conprimerent, donec tandem ultimae huc confluentes massae eodem modo lapides angulares se intersererent, atque adeo simili modo alterum firmum neque tamen tam latum annuli arcum componerent; quandoquidem ceterum praesentes Saturni satellites, qui partim minores sunt, quam variae inter se insertae annuli massae, remotos suos situs orbitasque, ut per se patet, propter varias suarum centripetarum centrifugarumque virium relationes, accepissent.

§ 8.

Opinatur LA PLACE (1) annulos, ut et satellites formatos esse vaporum zonis, quos vaporum planetae orbis singulos deinceps reliquerit, quoad illi lenta refrigeratione condensarentur. Ita ut, quando omnes ejusmodi vaporum annuli moleculas condensare pergerent, nec tamen inter se conjunctas, post longum, tempus liquidum vel solidum annulum formarent, necesse esset. Regularitas vero, quam talis formatio in omnibus annuli partibus inque earum refrigeratione postulat, causa est, quod illud phaenomenon maxime rarum sit, ita ut Saturni annuli unicum illius rei in nostro systemate solari exemplum praebeant, quoniam omnes reliqui annulorum vapores in frusta sint fracta et se in massis separatis collegerint.

§. 9.

Quam ingeniose autem harum opinionum nonnullae excogitatae sint, semper tamen merae manent conjecturae, quae ad veritatem nos nihilo propius ducant; ita ut coacti simus cum LA LANDIO, postquam breviter hypotheses CASSINII, MAUPERTUISII, MAIRANNI BUFFONIque recensuerat, dicere: » Toutes ces explications » sont si peu satisfaisante qu'il est inutile de nous y arrêter."

---

(1) *Exposition du Système du Monde*, 4°. ed. pag. 435.

CAPUT XI.

DE PHAENOMENIS, QUAE PLANETAE SATURNO OFFERAT ANNULUS.

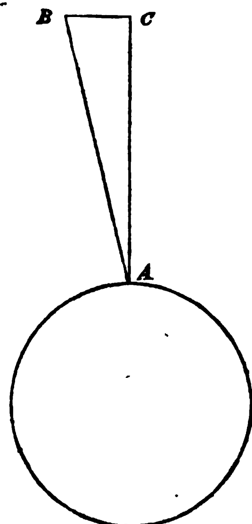
§. 1.

Postquam consideravimus, sub quanam forma annulus se terrae ostendat, et sub quibus phasibus idem visibilis sit, adhuc ultimo loco inquirendum est, quaenam hic annulus planetae offerat phaenomena.

Ut vidimus, annuli planis latentibus, rotundum latumque referunt circuliforme planum, quod optime comparare possumus cum horizontibus, qui artificiales nostros coeli terraeque globos circumdant.

In Saturni aequatore annulus cum tenui suo margine ad planetam conversus est, ibique apparet ut angustus ductus, qui ab oriente ad occidentem, ut arcus verticalis, per zenith transit, quumque alter alterum tegat annulus, fieri non potest, ut aliquid videamus de circumcurrente fissura vel intervallo, quod utrumque annulum separat, ita ut ambo annuli se ut unum ostendant.

Fundamento ponentes Struvei dimensiones, annulum invenimus in Saturni aequatore milliarium 4122 geographicorum distantia. Apparentem crassitudinem secundum Johannis Herschelii observationes 0″,023 statuentes, latitudinem, sub qua annulus se in Saturni aequatore ostendit, sequenti modo invenire possumus.



In figura apposita nobis est, secundum Struvei observationes (1) AC = 4″,339 et dimidiam annuli crassitudinem BC = 0″,0115 statuentes, accipimus

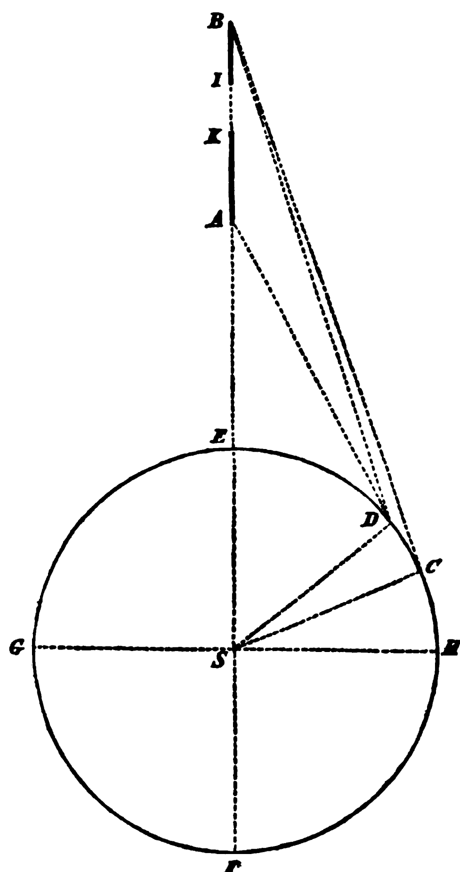
$$Tang.\ A = \frac{BC}{AB} = \frac{0{,}0115}{4{,}339}$$

$$Log.\ 0{,}0115 = 8.0606978$$
$$Log.\ 4{,}339 = 0.6373897$$
$$Log.\ tang.\ A = 7.4233081$$
$$A = 9'\,7'',7$$

(1) Vid. Cap. V. §. 8.

Itaque apparens latitudo vel angulus, sub quo, in Saturni aequatore annulum vident, aequalis est 18′ 15″,4; itaque nondum tam lata, ut nobis plenilunium apparet. Ita ut illic forte interdiu ne adspici quidem annulus possit, quoniam eum, quippe a se aversum sol non potest illuminare, atque noctu eae tantum conspici partes possunt, qui non in planetae umbra jacent.

Quando, auctore SCHRÖTERO, crassitudinem aequalem statuamus 0″,1262, nanciscimur, quod ad hunc angulum 1° 40′.



§. 2.

Quando parvam altitudinem, qua annulus, planetae ratione habita inveniatur, observemus, cito conjici potest, non ubique illum in planetae superficie conspici posse. Ut ergo inquiramus quo usque septemtrionem meridiemque versus aequatoris, in Saturni superficie conspici annulus possit, sit EGFH figura apposita Saturni intersectio, ita sumta, ut GH sit axis atque EF diametrus aequatorialis, qui prolongata per annulum AB transit, tunc nobis est Saturni radio SE = SD = SC = 1 posito (1),

$$SB = 2{,}2286$$
$$SA = 1{,}4823$$

nobisque est, videatur figura.

$$\cos. ESC = \frac{SC}{SB} = \frac{1}{2{,}2286}$$

$$Log.\ 1 = 0.0000000$$
$$Log.\ 2{,}2286 = 0.3480321$$
$$Log.\ \cos.\ ESC = 9.6519679$$
$$ESC = 63^\circ\ 20'\ 20''.$$

$$\cos. ESD = \frac{SD}{SA} = \frac{1}{1{,}4833}$$

$$Log.\ 1 = 0.0000000$$
$$Log.\ 1{,}4823 = 0.1709361$$
$$Log.\ \cos.\ ESD = 9.8290639$$
$$ESD = 47^\circ\ 34'\ 30''.$$

(1) Vid. Cap. IX. §. 5.

Exinde ergo sequitur annulum usque ad 63° 20′ 20″ ad aequatoris septemtrionalem meridionalemque partem conspici posse, si refractionem non observamus, quippe quae definitu difficilis est, quoniam atmosphaerae Saturni densitas non satis nobis est cognita.

Itaque hujus illuminati arcus phaenomena vel annuli se tantummodo extendunt ad torrida temperataque Saturni climata; ab 63° 20′ 20″ latitudinis borealis et australis usque ad polos semper sub horizonte manet. Atqui adeo ille inservire non poterat, quae Bodei prior erat sententia, quum de causis annuli finalibus ratiocinaretur (1), ut noctes quindecim annorum polorum Saturni illuminaret; contra vero, ut Bode postea animadvertit, ibi nunquam apparet, ubi fortasse lumine ejus maxime opus esset.

In 47° 34′ 30″ latitudinis borealis australisque ejus inferior margo demum in meridiano apparet; atque ibi, quod facile ex figura possumus derivare, maximam latitidinem videmus, qua annulus se ostendere potest. Ut definiatur sub quonam angulo, vel quanta latitudine hic annulum conspicere possimus, nobis est in triangulo ADB:

$$tang.\ ADB = \frac{AB\ sin.\ BAD}{AD - AB\ cos.\ BAD},$$

$$BAD = 90° + ESD,$$

$$tang.\ ADB = \frac{AB\ cos.\ ESD}{AD + AB\ sin.\ ESD},$$

$$AD = AS\ sin.\ ESD,$$

$$tang.\ ADB = \frac{AB\ cos.\ ESD}{(AS + AB)\ sin.\ ESD}$$

$$= \frac{AB\ cos.\ ESD}{SB\ sin.\ ESD}$$

$$= \frac{AB}{SB}\ cotg.\ ESD,$$

$$AB = SB - SA = 2{,}2286 - 1{,}4823$$

$$= 0{,}7463.$$

(1) *Astron. Jahrb.*, 1786. pag. 138.

$$\textit{Log.}\ 0{,}7463 = 9.8729134$$
$$\textit{Log. cotg.}\ 47^\circ 34' 30'' = 9.9609110$$
$$9.8338244$$
$$\textit{Log.}\ 2{,}2286 = 0.3480321$$
$$\textit{Log. tang.}\ \mathrm{ADB} = 9.4857923$$
$$\mathrm{ADB} = 17^\circ 1' 6''.$$

Ita ut Saturnicolis in 47° 34′ 30″ latitudinis borealis australisque, annulus in coelo 17° 1′ latitudinis complectatur

Ut definiamus, quo usque in his locis ad orientem occidentemque meridiani supra horizontem annulus se extendat, computemus superioris annuli quod ad haec loca partis azimuth; et quoniam azimuth, quod ad coeleste corpus in horizonte, sequenti formula

$$\textit{cos.}\ \text{Azimuth} = \frac{\textit{sin.}\ \text{Declin.}}{\textit{cos.}\ \text{Poli altit. loci}}$$

exprimitur; atque aequatoris altitudo = compl. poli altitud. = 90° — 47° 34′ 30″ = 42° 25′ 30″ et superior annuli margo ibi 17° 1′ supra horizontem stat, ejus declinatio est = 42° 25′ 30″ — 17° 1′ = 25° 24′ 30″, acquirimusque ita

$$\textit{Log. sin.}\ 25^\circ 24' 30'' = 9.6325246$$
$$\textit{Log. cos.}\ 47\ 34\ 30'' = 9.8290621$$
$$\textit{Log. cos.}\ \text{Azimuth} = 9.8034625$$
$$\text{Azimuth} = 50^\circ 30' 19''.$$

Ita ut annulus, quod ad haec loca se ad 50° 30′ 19″ ad meridiani orientem occidentemque extendat, ibique sub horizontem se abscondat.

Fissura vel intervallum, quod utrumque separat annulum, hisce locis etiam in maximo suo statu conspicitur, ut definiatur, quantum sese illud spatium ibi proferat, adhibet eadem figura, in qua IK intervallum proponit

$$\textit{tang.}\ \mathrm{IDK} = \frac{\mathrm{IK}}{\mathrm{SI}}\ \textit{cotg.}\ \mathrm{ESD},$$

secundum Struvei observationes nobis est

$$\mathrm{IK} = 0'',408; \quad \mathrm{SI} = 17'',6445,$$

tunc illa formula praebet:

$$Log.\ 0'',408 = 9.6106602$$
$$Log.\ cotg.\ 47^\circ 34' 30'' = 9.9609110$$
$$9.5715712$$
$$Log.\ 17'',6445 = 1.2466094$$
$$Log.\ tang.\ IDK = 8.3249618$$
$$IDK = 1^\circ 12' 38'',3$$

Ita ut intervallum ibi 1° 12′ 38″,3 in coelo contineat, quum exigua annuli crassitudo in hac distantia non sensibilem efficaciam habeat.

Haec apertura, inquit Herschel (1), certe insigne praebebit Saturno officium, diminuendo spatium, quod aliter in planeta per annulum absolvetur, cum propter radios a sole directe transmissos, tum propter validam radiorum solarium inter duos sibi invicem oppositos margines reverberationem. Si praeterea illi annuli densa circumdentur atmosphaera, quod valde probabile est, tunc quoque refractiones adjuvabunt ad diminuendam obscuritatem, quam aliter indivisi annuli umbra efficeret

Atque ita, quod ad omnia loca in Saturni superficie attinet, computare possumus, quanam figura illic se ostendat annulus.

§. 3.

Propter parvam ab annulo ad Saturni superficiem distantiam, hincque orientem magnam parallaxin ejusque situm constantem in aequatore, in Saturni superficie, scilicet ab 63° 20′ 20″ latitudinis borealis usque ad australem eandem latitudinem, variis locis obtinet defectus solis, quae diversus est, loci et situs solis ratione habita. In solstitio v. c. quando soli circiter 30° declinatio est, hemisphaera a sole aversa, circiter 16° ad 63° latitudinis in annuli umbra sita est, ita ut illic sol conspici nequeat. Aliquot mensibus post, quando iterum solis declinatio decrescere coepit, ab 63° ad aequatorem versus, assidue magis magisque apparet, quod, ut per se patet, cum sole oriente valde conveniet, vel ut apud nos sol reapparet post totalem solis defectum, ita ut lux solaris in illis regionibus se quotidie magis magisque extendat. Annuli umbra, quae continue angustior fit, sensim aequatorem petit, ita ut post annos 14¾ in Saturni superficie lineam formet, quae fere 50 milliaria geographica latitudine continet. Ab eo inde tempore in illa hemisphaera annulus continue a sole illuminatus apparet.

(1) *Phil. Transact.*, *for the Year* 1792. Part. I. pag. 5.

Omnino quoque post occasum atque ante ortum solis, pars a sole collustrata manet; nocte accedente major ejus pars in Saturni umbram pervenit. Hinc sequitur, ut illae regiones per suas annorum fere 15 aestates, clarissimis diebus fruantur, quae solum noctibus 5 horarum abrumpuntur, quaeque ultimae per solstitium aestivum etiam insigniter diminuuntur illaeque noctes praeterea annuli claritate illuminantur. Tali modo claritas multorum annorum fere non interrupta, insigniter compensare valet noctem 10 ad 12 annorum hiemis, quae nox tamen benefico septem lunarum fulgore etiam temperatur.

§. 4.

Quando ab aequatore usque ad 60° latitudinis borealis atque australis transimus, annulus se optime perfectissimeque ostendit. Quum borealis annuli facies a sole illuminatur, borealis hemisphaerae habitantes illuminatum vident annulum, qui illis interdiu ut leviter illuminatus arcus apparet, se ab orientali ad occidentalem horizontem extendens, atque in meridie altissimum suum situm attingens. Eadem sub forma noctu eum vident, haud dubie tamen pulchro claroque fulgore, qui in uno duntaxat loco propter planetae umbram abrumpitur. Jacet haec umbra, ut per se patet semper in cono, vel linea recta, quae solem planetamque conjungit, ac sole occidente tegit annuli orientalem partem, atque sic in annulum permeat, ut media nocte australis, atque sub solem orientem, occidentalis annuli pars in umbra jaceat, atque ita per unamquamque noctem phaenomenon annuli defectus repetat, quae admodum cum nostris defectibus lunaribus convenit; quo fit, ut hujus umbrae in planeta situs quasi pro sit horologio, in quo videre possunt quantum temporis vel ante vel post mediam noctem sit elapsum.

Attamen per illud tempus, quo borealem coeli partem incolentibus noctes tam pulchre illuminat annulus, meridionalis haemisphaerae astra habitatoribus eorum obsurat; in nonnullis autem regionibus quoque ipse sol interdiu pone eum delitescit. Si nempe sol supra annuli planum non alte elevatus sit, illum illuminat, in Saturnum umbram projicit annulus, circulique paralleli, in quos illa cadit, per longum tempus solem omnino non conspiciunt; per noctem suam hac de re tantummodo intuentur annulum, quod inde ab orientali usque ad occidentalem horizontem iis totam constellationum seriem tegat, notusque iis interdiu fit, quando clara atmosphaera aliquid luminis diurni aliquamdiu reflectit, instar zonae obscurae. Iis locis, in quibus solis defectus totalis per complures menses durans luminis diurni nihil omnino transmittit, dies atque nox non multum a se invicem different. Illam umbram, quam in Saturnum annulus projicit, per telescopia nostra, ut monuimus, facile agnoscimus, unde conclusimus, annulum opacum esse corpus.

Idem locum habet quod ad australem hemisphaeram attinet, quando australis annuli facies illuminatur. Simul cum planeta tali modo circum solem ducitur, annulus, ut ejus planum semper cum se ipso parallelum maneat, hincque fit, ut per alterum anni Saturnei dimidium pars borealis, atque per alterum dimidium pars annuli australis illuminetur. Circiter ergo 15 nostrorum annorum altera annuli pars nocte obtecta est; licet adumbratio puncti definiti in Saturno, non quidem tamdiu duret, quoniam a veris initio usque ad solstitium ab hemisphaera aequatoris boreali usque ad australem pergit, tamen solis defectus modo descriptus in multis regionibus valde est diuturnus. Quaenam varietates propterea in singularium zonarum climate efficiantur, non est, quod dijudicare possimus; si autem illud secundum nostri planetae naturam dijudicamus, omnino valde ingratum esse deberet, quando autumnus zonarum temperatarum terrae nostrae adhuc frigidior asperiorque fieret solis defectu qui hebdomades vel menses perduraret.

Planetae et cometae tantummodo annulis obteguntur, quando iis sunt declinationes exiles, quod etiam locum habet respectu Saturni satellitum, sed raro et per brevius tempus. Annulorum rotatio, quae ut vidimus, diuturnior est, quam Saturni, solum in annuli inaequalitatibus differentiam profert. Si autem annulorum poli cum rotationis polis Saturni coïncidunt, necesse est, ut hinc oriantur mutationes quod ad situm annulorum, ratione habita horizontis loci dati, quae mutationes convenienter situi eclipticae ejusque parallelorum in nostro horizonte, etiam secundum easdem possunt computari regulas. Illae autem mutationes nondum observatae videntur, suntque etiam conjunctae cum difficultatibus theoreticis, ut necessarium libere suspensorum annulorum servetur aequilibrium.

§. 5.

Dum typis inprimebatur haec dissertatio, mihi in manus venit praeclarum opus Beerii et Mädleri, cui titulus: *Beyträge zur physischen Kenntniss der himmlischen Körper im Sonnensysteme.* In quo etiam annulorum phases ratione Saturni habita, commemorantur, et parvo cum labore in omnibus planetae regionibus indagari possunt, ope tabellarum, in hoc opere occurrentium. Quam ob causam praecipuam quoque hujus operis partem hic describemus. Ad harum phasium computationem nominati auctores adhibent sequentia data pro basi (1):

Saturni diametrum aequatorialem . . . 17″,053 = 16305 mill. geogr.
» » polarem . . . . . 15 ,381 = 14696 » »

(1) Vid. opus laudatum, pag. 82.

Systematis annulorum diametrum	39 ,311	=	37587	mill. geogr.
Externi annuli latitudinem	2 ,011	=	1927	» »
Intervalli sive fissurae latitudinem	0 ,402	=	387	» »
Interni annuli latitudinem	3 ,907	=	3733	» »

Si disignemus:

per a planetae semiaxem aequatorialem;
b » » polarem;
ε excentricitatem;
ψ latitudinem Saturnigraphicam cujusdam puncti in Saturni superficie;
ψ' latitudinem emendatam sive Saturnicentricam ejusdem puncti;
ρ ejusdem puncti radium vectorem.

Cum haec data assumuntur, acquirimus, quod ad complanationem Saturni, ut cognitum est,

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{10{,}2}.$$

Quae magna complanatio insignem differentiam debet proferre inter latitudinem saturnigraphicam et saturnicentricam, et inter 40° et 50° plus quam 6° valent. Formulae pro radiis vectoribus in utroque casu sunt, ut notum est; quod ad latitudinem saturnigraphicam

$$\rho = a \sqrt{\frac{1+(1-\varepsilon^2)^2 \, tang.^2 \psi}{1+(1-\varepsilon^2) \, tang.^2 \psi}} = a \sqrt{\frac{(1-\varepsilon^2)^2 + cotg.^2 \psi}{(1-\varepsilon^2) + cotg.^2 \psi}};$$

et quod ad latitudinem saturnicentricam

$$\rho = \frac{b}{\sqrt{(1-e^2 \, cos.^2 \psi')}};$$

quum sit $\varepsilon^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$.

Secundum primam formulam Beer et Mädler radios vectores sphaeroidae Saturni computaverunt et nacti sunt hae resultata:

pro	0°	latitudine	8″,526,
»	10	»	8 ,502,
»	20	»	8 ,433,
»	30	»	8 ,325,
»	40	»	8 ,191,
»	50	»	8 ,046,

»	60	»	7 ,908,
»	70	»	7 ,793,
»	80	»	7 ,717,
»	90	»	7 ,690,

Deinceps hi radii vectores decomponuntur in duabus coördinatis, quarum alteram x in aequatoris plano, alteram y perpendiculariter in eo erectam est, tunc quando radii quatuor marginum annulorum, qui hic in censum veniunt, per R_1, R_2, R_3, R_4, proponuntur, habemus quod ad apparentem declinationem ϕ horum quatuor marginum, visorum e superficie Saturni, sequentem valorem

$$tang.\ \phi n = \frac{y}{Rn - x}.$$

Quia omnes annuli putantur siti esse in aequatoris Saturni plano, pertinent illae apparentes declinationes proprie ad parallaxarum ordinem. Illi paralleli sphaerae Saturni, quibus ϕ fit maximum, sunt simul ii, qui limites visibilitatis, eorum quam diximus marginum annulorum proponunt. Quum ergo denotabimus margines annulorum a parte exteriore ad partem interiorem, tunc formula praebet sequentes parallacticas declinationes:

Latitudo.	Margo exterior annuli exterioris.	Margo interior annuli exterioris.	Margo exterior annuli interioris.	Margo interior annuli interioris.
0°	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′
10	5 26	7 12	7 32	13 21
20	11 23	13 42	14 17	23 59
30	16 0	19 0	19 43	31 1
40	19 33	22 50	23 37	34 57
50	21 55	25 13	25 59	36 30
60	23 9	26 17	26 59	(36 12)
70	(23 21)	(26 11)	(26 50)	(35 0).

Per interpolationem inter has series nanciscimur:

Limitem	visibilitatis	margini	exteriori	annuli	exterioris,	latitudine	66° 36′.
»	»	»	interiori	»	»	»	63° 37′.
»	»	»	exteriori	»	interioris	»	62° 57′.
»	»	»	interiori	»	»	»	53° 28′.

Ita ut, secundum hanc computationem, extra limites 66° 36′ latitudinis borealis australisque in Saturno ne annulorum minima quidem particula conspici queat.

In his parallelis sphaerae Saturni simul etiam locum habent minimae opticae diminutiones planorum annulorum. Loci autem ubi annuli latissime videntur, in puncta cadunt, quae propius aequatorem Saturni jacent reliquis. Invenimus quod ad illud attinet

Maximam latitudinis	annuli exterioris . . .	3° 19′,1,	quod	ad	parallelum	44° 50′,
»	» divisionis	47,2	»	»	»	42 45;
»	» annuli interioris . . .	11 26,5	»	»	»	35 30;
»	» totius systematis annulor.	15 26,2	»	»	»	37 30.

Ut computemus, quomodo se habeat illuminationes annulorum ad Saturnum et contra, sequentia data pro basi sumimus:

Annuli inclinationem ad eclipticam, in anno 1830	= 28° 10′ 34″.
Adscendentis nodi longitudinem annuli in ecliptica	= 167 16 23 .
Orbitae Saturni inclinationem ad eclipticam	= 2 29 31 .
Adscendentis ejus nodi longitudinem	= 112 11 35 .
Plani annuli et aequatoris Saturni inclinationem ad orbitam Saturni	= 26 49 17 .
Nodi adscendentis longitudinem	= 171 17 34 .

Ut vidimus, quaeque hemisphaera Saturni durante ejus tempestate brumali tantum obscurum latus annuli supra horizontem suum habet, quod ei propterea lucem solarem aufert. Illa jactura lucis constat ergo in eclipsibus solis, quarum durationes non sicut apud nos per horas et minutas, sed per annos terrestres dimetimur. Cum porro aequatoris Saturni inclinatio sit major, quam maximam parallaxin pro exterioribus annuli marginibus, hinc sequitur, omnem locum superficiei Saturni, ubi annuli conspici possunt, hasce eclipses sive defectus participare.

In tempestate aestiva non locum habet, ut vidimus, lucis jactura; contra vident annulum totum interdiu illuminatum, praeterquam quod, proxime aequatori sitis regionibus, mane in occidente et vespere in oriente, parva ejus pars per breve tempus non luminatum manet. Per noctes partialem illuminationem afferunt annuli, sed variis locis, magnis differentiis; nam insignis annulorum pars et quidem ea pars, quae media nocte medium visibilis coeli occupat, a planeta adumbratur fitque fortasse tunc solum stellarum fixarum occultatione visibilis.

Ut ergo haec aliquantum implicita phaenomena quam brevissime et perspicue efficiant, punctum aequinoctiale autumnale hemisphaerae septemtrionalis (171° 17′ 34″) assumunt tanquam zero et hinc numerare incipiunt. Quo fiet, ut 90° ubique in hanc hemisphaeram in obscuratione media cadat, qui simul ubique locus est brevissimae solis morae supra horizontem atque ita solstitium brumales.

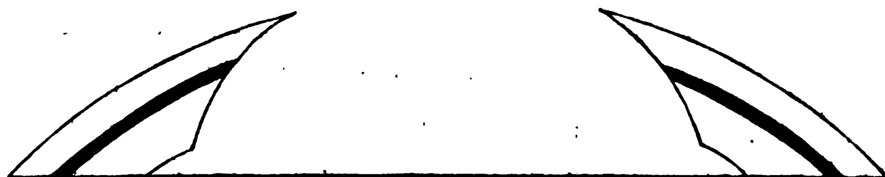
Phaenomenorum ergo duratio accommodatissime secundum gradus longitudinis heliocentricae Saturni dari potest; pro omni hujus longitudinis gradu computare possumus, medio sumto, 29,886 vel in numeris aliquotis 30 dies terrestres vel 68,4 dies saturnales. Hoc antea posito, sequentem tabulam computaverunt de initio et fine harum eclipsium, a 5 ad 5 gradus latitudinum saturnigraphicarum.

Latitudo.	Defectus per annulum exteriorem.		Interruptiones defectus per fissuram.		Defectus per annulum interiorem.		Duratio totalis.
	Primus.	Secundus.	Prima.	Secunda.	Primus.	Secundus.	
0	0°	180°	0°	180°	0°	180°	0°
5°	5,9— 7°,3	172°,7—174°,1	7°,3— 7°,6	172°,4—172°,7	7°,6—12°,7	167°,3—172°,4	2× 6°,8
10	11 ,8—14 ,4	165 ,6—168 ,2	14 ,4—15 ,2	164 ,8—165 ,6	15 ,2—28 ,0	152 ,0—164 ,8	2×16 ,2
15	17 ,7—21 ,7	158 ,3—162 ,3	21 ,7—22 ,7	157 ,3—158 ,3	12 ,7—43 ,0	137 ,0—157 ,3	2×25 ,3
20	23 ,5—28 ,8	151 ,2—156 ,5	28 ,8—30 ,2	149 ,8—151 ,2	30 ,2—61 ,7	118 ,3—149 ,8	2×38 ,2
25	29 ,1—36 ,0	144 ,0—150 ,9	36 ,0—37 ,8	142 ,2—144 ,0	37°,8—142°,2		121°,8
30	34 ,6—42 ,9	137 ,1—145 ,4	42 ,9—45 ,2	134 ,8—137 ,1	45 ,2—134 ,8		110 ,8
35	39 ,2—49 ,8	130 ,2—140 ,8	49 ,8—52 ,5	127 ,5—130 ,2	52 ,5—127 ,5		101 ,6
40	44 ,6—56 ,4	123 ,6—135 ,4	56 ,4—59 ,9	120 ,1—123 ,6	59 ,9—120 ,1		90 ,8
45	49 ,0—62 ,8	117 ,2—131 ,0	62 ,8—67 ,3	112 ,7—117 ,2	67 ,3—112 ,7		82 ,0
50	52 ,7—68 ,8	111 ,4—127 ,3	68 ,6—74 ,7	105 ,3—111 ,4	74 ,7—105 ,3		74 ,6
55	55 ,7—73 ,8	106 ,2—124 ,3	73 ,8—82 ,7	97 ,3—106 ,2	82 ,7— 97 ,3		68 ,6
60	57 ,3—77 ,6	102 ,4—122 ,7	77°,6—102°,4		——		2×20°,3
65	58°,7—121°3—		——		——		62°,6

Ex hac tabula concludere possumus, durationem longissimam obscurationis annuli exterioris in latitudinem 23°27′ locum habere, et defectum 27°,4′ ad 33°,7, hoc est, 6°,3 aut 188 dierum terrestrium efficere, quam sequitur interruptio dierum 52, per quod tempus sol per fissuram utriusque annuli lucet; tunc sol moratur a 35° 45′ ad 144° 55′ itaque 3261 dies terrestres, continuo post interiorem annulum, quando iterum interruptio dierum 52 atque defectus 188 dierum, cyclum in longitudine 152°,6 terminat; ita ut haec quamvis tropica regio in Saturno hieme per 10 annos terrestres luce solari sit privata. Omnes regiones propius aequatorem sitae per diem suum brevissimum vident solem infra annulum culminantem atque arcus suos diurnos perficientem ibique in unoquoque singulari annulo duae eclipses sive defectus efficiuntur. Inde a 23°,27 usque ad 57°,5 inte-

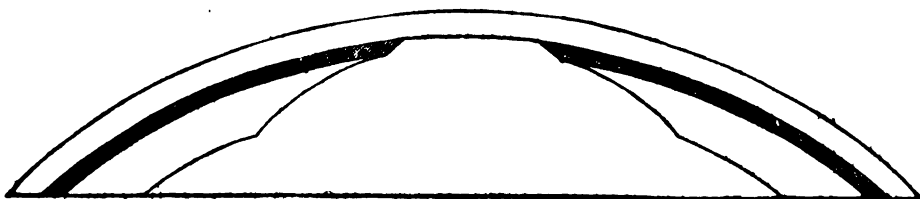
rior annulus solus efficit magnum reliquique annuli singuli duas defectus. Inde usque ad circulum polarem media hiems cadit in tempus illud, quo sol brevissimum suum arcum diurnum apparentem perficit, dum lucet per fissuram; propius polos, quo usque nempe annuli adhuc appareant, media hieme post eos absconditus manet.

Tempestate aestiva in Saturni hemisphaerio, quod totum hisce eclipsibus caret, et cujus breves noctes partim adhuc annulorum ope illuminantur, planetae umbra in annulis conspicitur, quae tempore aequinoctiorum 0,2035 aut fere $\frac{1}{5}$ partem marginis interioris et 0,1474 aut circiter $\frac{1}{7}$ partem exterioris marginis tegit. Illuminatae annulorum partes tunc fere hanc habent formam:



Post solis occasum conspiciuntur tantum occidentales annulorum arcus; illi autem insigni parte, per noctem longitudine decrescunt, quum contra orientales longitudine augeantur, donec eos ante solis ortum duntaxat videant. Quo longius ab aequatore, eo breviores ambo illuminata latera fiunt, quia minor totius pars super horizonte stat, atque adumbratae magnitudo partis eadem manet. In ultimis limitibus visibilitatis annulorum omnino nil in media nocte conspicitur, sed tantum post solis occasum, pars occidentalis et ante solis ortum orientalis.

Circa mediam aestatem relatio iterum omnino alia fit. Saturni umbra tunc annulum exteriorem parum adhuc et denique omnino non tangere potest; radii solares eum trans Saturni polum attingere possunt, etiam annulus interior minus amittit, quam aequinoctiorum tempore, quia non amplius umbra partis aequatorialis, sed solum illa minorum circulorum parallelorum in eam cadit. Exterior annuli exterioris margo 62°.4 itaque plus quam $\frac{1}{6}$ anni saturnalis, vel 5 annorum terrestrium, umbrae expers manet; atque interior exterioris annuli margo 22°,5 aut 672 dies terrestres ea caret. Media igitur aestate partes illuminatae circa mediam noctem hanc habent figuram:



Hoc tempore igitur totum hemisphaerium usque ad latitudinem 65° 36′ omnibus noctibus, fulgorem annulorum habet, et quidem eo magis, quo regio propius aequatori sita est. Quum tamen inde a 45°, annuli exterioris latitudo et inde a 35° illa interioris annuli iterum decrescat; sequitur, regiones tropicas Saturni, licet illuminati arcus longiores et altiores supra suum horizontem elevati sint, quod ad quantitatem minorem fulgorem quam latitudines intermedias habere. Sub aequatore ipso per totum annum minimus fulgor locum habet.

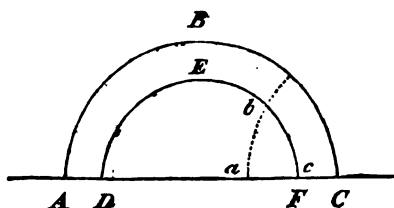
Per se patet omnia quae de hemisphaerio boreali diximus, etiam valere de australi, quando adjungimus 180° ad longitudinem, supra ab autumnali aequinoctiorum puncto computatam.

Ita hinc concludere nobis licet, officia, quae isti annuli Saturno praebeant, non posse compensare lucem solarem, quam illi eripiunt. In mediis et superioribus latitudinibus breves dies brumales omnino absunt, mutanturque sin minus in noctes absolutas, proprie sic dictas, saltem in obscura crepuscula. Hoc in Saturno crepusculum, ut saepius jam vidimus, in nostra terra in illa nigra zona vel cingulo perspicue observatur.

Contra, annuli a planeta in sua aestate multa luce solari privantur; ille autem eos hanc ob causam in eorum hieme partim illuminat. Omne planum annulorum latus, ut vidimus, per semestrium saturnale vel 14,7 annos terrestres omnino non et per alterum dimidium continuo a sole illuminatur, praeter Saturni obumbrationem. Interior limes annuli interioris per illos 14,7 annos, habet dies longitudinis inde a $8^h\ 22^m$ usque ad $8^h\ 40^m$, dum noctes ab $1^h\ 50^m$ usque ad $2^h\ 8^m$ durant. Quod ad exteriores extremi annuli fines hae noctes ad summum durant $1^h\ 33^m$ et diminuuntur, ut supra vidimus, usque ad zero, ita ut per 5 continuos annos terrestres eo loco dies sit. Breves illae noctes aestivae per se non habent illuminationem Saturni; per diem vident partem Saturni et medio die totum discum illuminatum. Ille praegrandis discus, cujus singula annuli facies assidue alteram haemisphaeram adspicit, continet quod ad interiorem interni annuli marginem in diametro aequatoriali 82° et in diametro polari 36°,6. Quod ad exteriorem interioris annuli marginem valent hae quantitates 59°,9 et 27°,1; quod ad marginem interiorem annuli exterioris 52°,4 et 26°,4; et quod ad exterioris annuli marginem exteriorem 51°,2 et 23°,4, ita ut, quod attinet ad marginem annuli interioris interiorem Saturni sphaeram octavam totius coeli partem occupet et solis magnitudinem, sicut ex terra conspicitur, vicies millies superet!

Per noctem 14,7 annorum terrestrium, annuli in periodis, quae illis rotationis aequales sunt, a Saturno illuminantur. Est autem illa illuminatio in variis annulis minoris intensitatis pro distantia eorum ad Saturnum. Media quaque perio-

do Saturnus illuminat per totum suum discum, qui solum per annuli umbram in duas zonas et in unum vel plura spatia intermedia gracilia divisus est; dum regiones polares Saturni, quae per hiemem continua nocte obteguntur, ex annulis non possunt conspici. Quare phases Saturni, quae in annulo observantur, cum lunae nostrae phasibus comparari nequeunt. Hae phases in decrescendo non tantum graciliores, sed etiam breviores fiunt; finiuntur ét incipiunt a luminis puncto et non falciformes sive falcatae, ut in nostra luna locum habet. Haec causa est, quod, propter magnam propinquitatem planetae non totum hemisphaerium visibile sit, margoque Saturni non cyclus magnus meridianus, sed duntaxat insigniter parallelus magis dissitus cycli meridiani sit; quo adhuc accedit, quod etiam limes illuminationis polos non attingit. Quod figurâ, quam juxta adscripsimus, magis perspicuum fiet. Cujus exterior semicyclus ABC significat dimidium boreale haemisphaerium Saturni, interiorque semicyclus DEF ejus partem, quae ad annulum conversa est, atque linea punctata *ab* limitem illuminationis in semestri brumali. Ita illa pars, quae ex annulis conspicitur, formam habet particulae *abc*, apparetque hinc facile quasnam formas pars illuminata in extenso luminis limite assumere debeat. Duratio ejus partis noctis, in qua Saturnus annulos omnino non illuminat, aequalis est longissimae durationi unius noctium ejus aestivarum.



Solummodo margines graciles exteriores amborum annulorum omnino a Saturno aversi sunt. Quatenus hi margines revera habeant parva loca plana, a margine exteriore exterioris annuli solum conspicitur coelum purum; interior exterioris annuli margo atque exterior interioris annuli margo zenithaliter sibi oppositae sunt; e priore conspicitur totus Saturni discus, excepta duntaxat parte aequatoriali anteriore annulo tecta.

Hic animadversiones nostras finiemus; si vero Lectorum Benevolorum aliquis de annuli conditione ejusque causis finalibus, quod ad Saturnum attinet, legere cupiat, non melius edoceri poterit, quam si, adeat *Astronomisches Jahrbuch von* Bode *für das Jahr* 1786, in quo opere Bode annuli in Saturno phaenomena satis fuse tractat; porro Brandes, *Vorlesungen über die Astronomie*, *zweiten Theil*, atque Littrow, *der Himmel seine Welten und seine Wunder*, *zweiten Band*. In quibus operibus abundantem de hoc argumento materiam inveniet Benevolus Lector.


Fig 1.


Fig. 2.


Fig. 3.


Fig. 4.


Fig. 5.


Fig 6


Fig 7.


Fig. 8


Fig. 9


Fig 10.


Fig 11


Fig. 12


Fig. 13.


Fig.14


Fig.15.


Fig. 16.


Fig. 17.


Fig. 18.


Fig. 20.


Fig. 19.


Fig. 21.


Fig 22


Fig. 23.


Fig 24.




Wolbach Library
3 2044 027 938 406


32044027938406